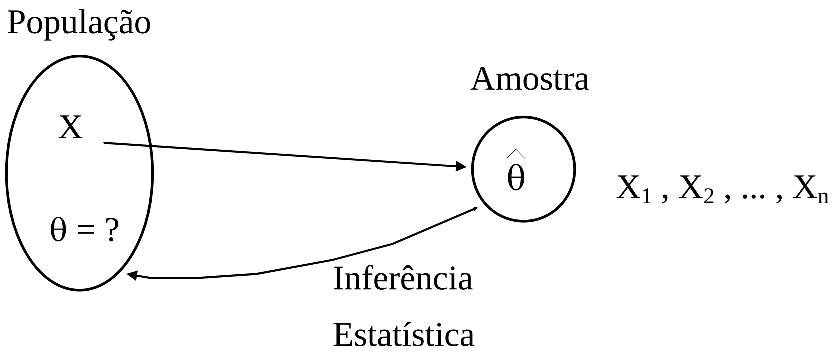
CAPÍTULO 6 - ESTIMAÇÃO E TESTES DE HIPÓTESES

6.1 INTRODUÇÃO

$$\text{INFERÊNCIA ESTATÍSTICA} \begin{cases} \text{Estimação} \begin{cases} \text{por ponto} \\ \text{por intervalo} \end{cases} \\ \text{Testes de Hipóteses} \end{cases}$$



6.2 ESTIMAÇÃO

Consideremos uma amostra ($X_1 , X_2 , ... , X_n$) de uma v.a. X que descreve uma característica de interesse de uma população. Seja θ um parâmetro que desejamos estimar. Um estimador do parâmetro θ é qualquer função das observações $X_1 , X_2 , ... X_n$. Chamaremos de estimativa a cada particular valor assumido por um estimador. Por exemplo, seja X a altura das pessoas de uma determinada localidade e suponha que estejamos interessados em estimar a altura média μ dessa população. Para tanto uma amostra aleatória ($X_1 , X_2 , ... , X_{30}$) de 30 pessoas foi retirada e a sua altura média $\overline{X}$ foi de 1,67 m. Nesta situação, a média populacional μ é o parâmetro a ser estimado, a média amostral $\overline{X}$ é o estimador utilizado e o valor da média 1,67 m é uma estimativa para μ .

O problema da estimação é determinar uma função dos valores amostrais ($X_1 , X_2 , ... X_n$) que seja "próxima" de θ, segundo algum critério. Existem vários métodos de obtenção de estimadores, e para um mesmo parâmetro podemos ter mais de um estimador . Sendo assim, é necessário estudar algumas propriedades que os distinguem uns dos outros.

6.2.1 PROPRIEDADES DOS ESTIMADORES

DEFINIÇÃO : Um estimador $\hat{\theta}$ é dito um estimador não-viesado (ou não-tendencioso) do parâmetro θ se :

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

ou seja, se a média da sua distribuição amostral é igual a θ. Por exemplo:

$\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ é um estimador não-viesado de μ

$\hat{p} = \dfrac{X}{n}$ é um estimador não-viesado de p

$s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})}{n-1}$ é um estimador não-viesado de σ^2

DEFINIÇÃO : Se $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são dois estimadores não viesados de um mesmo parâmetro θ , e ainda :

$$V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2) \quad ,$$

então $\hat{\theta}_1$ é dito mais eficiente do que $\hat{\theta}_2$.

Por exemplo, consideremos uma população normal X , com parâmetros μ e σ^2 . Queremos estimar a mediana Md dessa população. Por ser uma distribuição simétrica, sabemos que μ = Md. Definindo como $\overline{X}$ a média e como md a mediana da amostra, qual dos dois estimadores é o “melhor” para a mediana populacional ?

Sabemos que $\overline{X}$: N(μ , σ^2/n) e pode-se demostrar que a distribuição da mediana amostral tem uma distribuição próxima à md : $N\left(Md\ ,\ \frac{\pi}{2}\frac{\sigma^2}{n} \right)$.

Os dois estimadores são não-viesados, mas $\overline{X}$ é mais eficiente pois :

$$V(\overline{X}) < V(Md)$$

Assim, para estimar-se a mediana desta população, é preferível usar a média da amostra como estimador.

<u>OBSERVAÇÃO</u> :

Existem procedimentos ou métodos para se obter estimadores. Entre eles podemos citar o Método de Máxima Verossimilhança, o Método dos Mínimos quadrados, o Método dos Momentos e o Método de Bayes.

6.2.2 ESTIMATIVA POR PONTO

Uma estimativa por ponto de algum parâmetro populacional θ é um único valor $\hat{\theta}$ calculado através de dados amostrais, para o qual temos alguma garantia de que este está "perto" do parâmetro θ a ser estimado .

6.2.3 ESTIMATIVA POR INTERVALO

Uma estimativa por intervalo de um parâmetro θ é um intervalo da forma :

$$\hat{\theta}_I < \theta < \hat{\theta}_S$$

onde $\hat{\theta}_I$ e $\hat{\theta}_S$ dependem do valor da estatística $\hat{\theta}$ para uma particular amostra e também da distribuição amostral de $\hat{\theta}$.

6.2.4 ESTIMATIVAS PARA A MÉDIA POPULACIONAL μ

Uma estimativa pontual para a média μ é dada pela estatística :

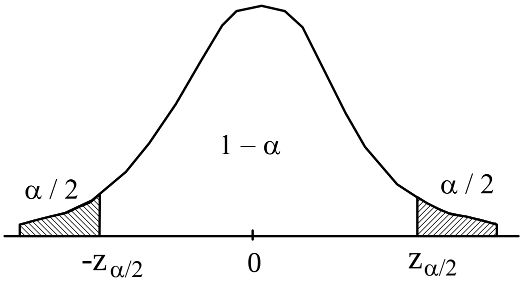
$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Uma estimativa por intervalo para μ pode ser encontrada considerando a distribuição amostral de $\overline{X}$, ou seja :

$$\overline{X} : N\left(\mu , \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad , \quad \text{para } n \text{ grande .}$$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Se fixarmos um valor α de probabilidade :



$$P\,(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

ou ainda ,

$$\boxed{P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha}$$

Podemos, então dizer que existe 1-α de probabilidade de que o intervalo acima, chamado de INTERVALO DE CONFIANÇA para μ , contenha o valor verdadeiro do parâmetro μ .

<u>OBSERVAÇÕES</u> :

(1) 1-α é chamado de nível de confiança do intervalo e α é o nível de significância .

(2) O intervalo de confiança acima é válido quando o tamanho da amostra <u>n</u> é grande e o desvio padrão σ é conhecido. Quando não conhecemos σ, que é o caso mais geral, substituímos este valor pelo desvio padrão s da amostra, desde que a amostra seja grande.

(3) Se n é pequeno e desconhecemos σ, então a estatística usada é :

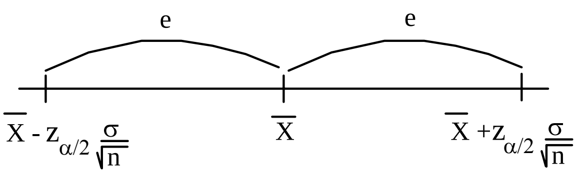
$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

T tem distribuição “t de Student” com n-1 graus de liberdade.

6.2.4.1 Erro e Tamanho da Amostra

Se $\overline{X}$ é usada como uma estimativa de μ , podemos ter (1-α).100 % de confiança de que o erro e é menor do que :

$$\boxed{e < z_{\alpha/2} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$



Se $\overline{X}$ é usada como uma estimativa de μ , podemos ter (1-α).100 % de confiança de que o erro é menor do que um valor especificado e quando o tamanho da amostra é :

$$\boxed{n = \left(\frac{z_{\alpha/2} . \sigma}{e} \right)^2}$$

OBSERVAÇÃO :

Quando não se conhece σ , pode-se estimá-lo através de uma amostra “piloto” ou através do conhecimento de σ numa situação semelhante.

EXEMPLO

Uma máquina enche pacotes de café com uma variância igual a 100 g^2. Ela estava regulada para enchê-los com 500 g, em média. Agora, ela se desregulou e queremos saber qual a nova média μ. Uma amostra aleatória de 25 pacotes foi retirada e apresentou uma média igual a 485 g.

(a) Uma estimativa pontual para a média μ é dada pela média amostral :

$\overline{X}$ = 485 g .

(b) Vamos construir um intervalo de confiança de 95 % (I.C.) para μ :

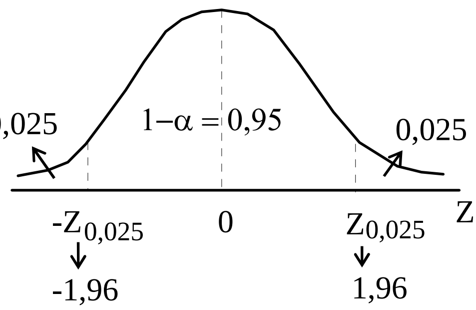
$\overline{X}$ = 485 g

σ^2 = 100 (σ = 10)

n = 25

1-α = 0,95

$z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$



$$P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1-\alpha).100\%$$

P(482,08 < μ < 488,92) = 95%.

Assim podemos ter 95 % de confiança de que o intervalo (482,08 ; 488,92) contem o valor da média μ dos pesos dos pacotes que são enchidos por esta máquina. Note que o valor 500g não está no intervalo, indicando que, de fato, a máquina está desregulada.

(c) Qual o erro máximo cometido na estimativa de μ neste caso ?

Podemos ter 95% de confiança que a média amostral $\overline{X}$ = 485 difere da média populacional μ por um valor menor que :

$$e = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96.\frac{10}{\sqrt{25}} = 3,92g\ .$$

(d) Para que este erro seja diminuído para 2 g, qual deveria ser o tamanho da amostra necessária para isto ocorrer com 95 % de confiança ?

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}.\sigma}{e}\right) = \left(\frac{1,96.10}{2}\right)^2 = 96,04$$

Ou seja, se n = 96 podemos ter 95 % de confiança que o erro na estimativa de μ seria menor do que 2 g .

6.2.5 ESTIMATIVAS PARA A PROPORÇÃO

Uma estimativa pontual para p , uma proporção populacional, é dada pela estatística :

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

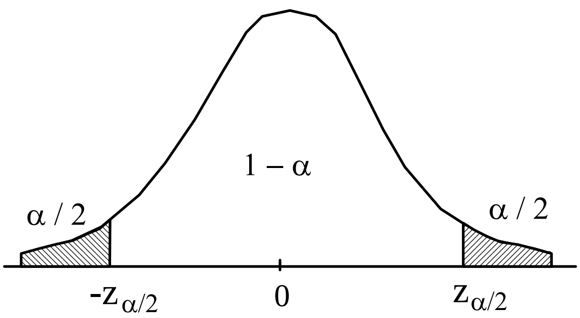
onde x é o número de elementos na amostra que possuem uma determinada característica e n é o tamanho da amostra.

Uma estimativa por intervalo para p pode ser encontrada através da distribuição amostral de $\hat{p}$, a proporção amostral.

Sabemos que :

$$\hat{p} : N\left(p, \frac{p.q}{n}\right) \quad , \text{ para } n \text{ grande}$$

Se fixarmos um valor α de probabilidade :



$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p.q}{n}}}$$

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P\left(z_{\alpha/2} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p.q}{n}}} < z_{\alpha/2} \right) = 1-\alpha$$

ou ainda :

$$P\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p.q}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p.q}{n}} \right) = 1-\alpha$$

Como a situação mais comum é não se conhecer o desvio padrão $\sqrt{\dfrac{p.q}{n}}$, podemos estimá-lo por : $\sqrt{\dfrac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}$.

Assim, um intervalo de confiança de (1- α).100% para o parâmetro p é dado por :

$$\boxed{P\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}} \ < \ p \ < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}\right) = (1-\alpha).100\%}$$

onde $\hat{p}$ é a proporção amostral, n é o tamanho da amostra, $\hat{q}$ = 1- $\hat{p}$ e $z_{\alpha/2}$ é o valor da v.a. Z com área de $\alpha/2$ à direita .

Podemos dizer, então, que existe (1 - α)100% de confiança que o intervalo acima contem o valor real da proporção p .

6.2.5.1 Erro e Tamanho da Amostra

Se $\hat{p}$ é usado como uma estimativa de p, podemos estar (1 - α)100% confiantes de que o erro e será tal que :

$$\boxed{e \ < \ z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}}$$

Se $\hat{p}$ é usado como um estimativa de p, podemos estar (1 - α)100% confiantes de que o erro será menor do que e quando o tamanho da amostra for :

$$\boxed{n \ = \ \frac{z^2_{\alpha/2}.\hat{p}.\hat{q}}{e^2}}$$

OBSERVAÇÃO :

Como $\hat{p}$ já é uma estatística encontrada a partir da amostra e portanto não conhecida ainda, na pior das hipóteses, poderíamos tomar $\hat{p}$ = 0,5. Neste caso :

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2}{4e^2}$$

EXEMPLO

Numa amostra aleatória de n=500 famílias que possuem aparelho de TV numa cidade do Canadá, foi encontrado que x = 340 possuem TV a cores.

(a) Uma estimativa pontual para a proporção de famílias (que já possuem TV) que tem TV a cores é dada por :

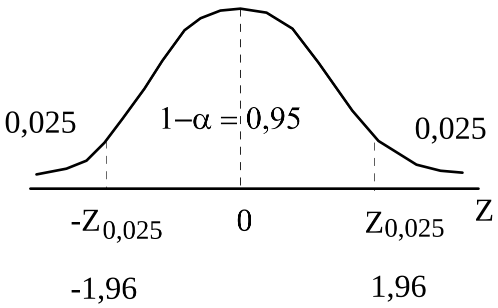
$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{340}{500} = 0{,}68 \quad (\text{ ou } 68\%)$$

(b) Um intervalo de confiança de 95% para a proporção real de famílias nesta cidade que possuem TV a cores, dado que possuem TV é :

$\hat{p}$ = 0,68

n = 500

$z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1{,}96$



$$P\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}\right) = (1-\alpha).100\%$$

$$P\left(0{,}68 - 1{,}96.\sqrt{\frac{0{,}68.0{,}32}{500}} < p < 0{,}68 - 1{,}96.\sqrt{\frac{0{,}68.0{,}32}{500}}\right) = 95\%$$

$$P(0{,}64 < p < 0{,}72) = 95\%$$

Existe 95% de confiança de que o intervalo (0,64 ; 0,72) contem o valor da proporção p das famílias que possuem TV a cores, dado que possuem TV, nesta cidade.

(c) O erro máximo cometido com 95% de confiança é :

$$e = \hat{p} - p = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}} = 0,04 \quad (\text{ ou } 4\%)$$

(d) Qual deve ser o tamanho da amostra para estarmos 95% confiantes de que o erro ao estimarmos p seja menor do que 0,02 ?

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2}.\hat{p}.\hat{q}}{e^2} = \frac{1,96^2.0,68.0,32}{0,02^2} = 2090$$

(e) Se não for utilizado p = 0,68 como uma estimativa de p, o tamanho da amostra em (d) seria :

$$n = \frac{1,96^2}{4.0,02^2} = 2401 \; .$$

6.2.6 ESTIMATIVAS PARA DIFERENÇAS

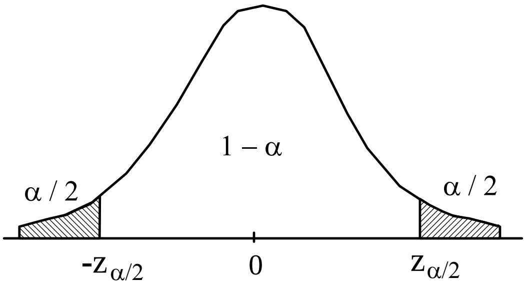
6.2.6.1 Estimativas para diferenças entre duas médias

Se tivermos duas populações com médias μ_1 e μ_2 e variâncias σ_1^2 e σ_2^2, respectivamente, um estimador pontual para a diferença entre μ_1 e μ_2 é dado pela estatística $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$, baseada em amostras independentes de cada uma das populações, com tamanhos n_1 e n_2 , respectivamente.

Uma estimativa por intervalo pode ser obtida para μ_1 e μ_2 , a partir da distribuição amostral de $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$. Sabemos que, para n_1 e n_2 suficientemente grandes:

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 : N\left(\mu_1 - \mu_2 \, , \, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$



$$P(z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z_{\alpha/2} \right) = 1-\alpha$$

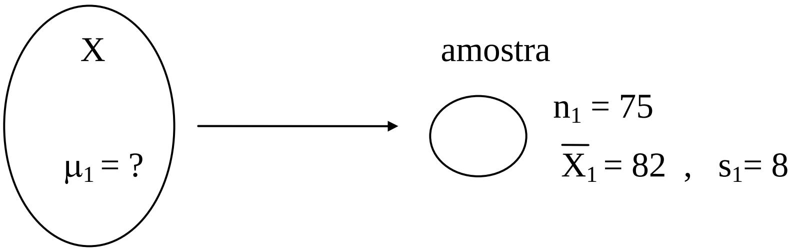
P (?????) ver apostila

Quando n_1 e n_2 são grandes e desconhecemos σ_1^2 e σ_2^2 , podemos substituir estas variâncias pelas variâncias amostrais s_1^2 e s_2^2 .

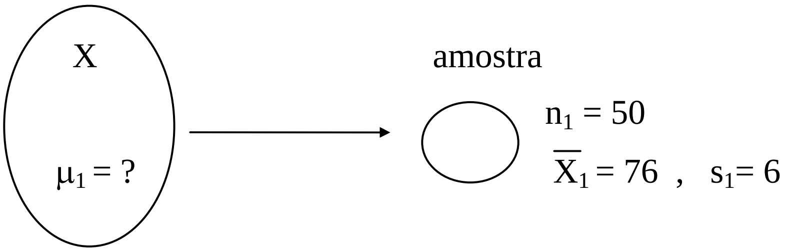
<u>EXEMPLO</u>

Um teste sobre esportes foi aplicado a 50 meninas e 75 meninos. As meninas obtiveram média de 76,0 com um desvio padrão de 6, enquanto que os meninos obtiveram média 82,0 com desvio padrão de 8. Encontre um intervalo de confiança de 96% para a diferença μ_1 - μ_2 , onde μ_1 é a média de todos os meninos e μ_2 é a média de todas as meninas que poderiam fazer este teste.

Pop.1 (meninos)



Pop.2 (meninas)



$\alpha = 0{,}04$
$1-\alpha = 0{,}96$
$z_{\alpha/2} = z_{0{,}02} = 2{,}054$

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \;<\; \mu_1-\mu_2 \;<\; \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(82 - 76 - 2{,}054\sqrt{\frac{8^2}{75}+\frac{6^2}{50}} \;<\; \mu_1-\mu_2 \;<\; 82 - 76 + 2{,}054\sqrt{\frac{8^2}{75}+\frac{6^2}{50}}\right) = 0{,}96$$

$$P\,(\,3{,}42 \;<\; \mu_1-\mu_2 \;<\; 8{,}58\,) = 0{,}96$$

Existe 96% de confiança de que o intervalo construído contenha a diferença entre as médias reais $\mu_1 - \mu_2$ das notas de meninos e meninas.

6.2.6.2 Estimativas para Diferenças entre Duas Proporções

Considere duas amostras independentes selecionadas de duas populações binomiais com parâmetros p_1 e p_2 , respectivamente. Uma estimativa pontual para a diferença entre duas proporções $p_1 - p_2$ é dada pela estatística $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ onde $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$ são proporções amostrais .

Uma estimativa por intervalo para a diferença entre as duas proporções é obtida através da distribuição amostral da diferença de duas proporções. Sabemos que :

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 : N\left(p_1 - p_2\,,\; \frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}\right)$$

$$\text{e} \quad Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}}}$$

$$P(-z_{\alpha/2} \;<\; Z \;<\; z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} \;<\; \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_1 \cdot q_1}{n_1}}} \;<\; z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}} \;<\; p_1 - p_2 \;<\; \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}}\right) = 1-\alpha$$

O desvio padrão da distribuição amostral poderá ser estimado por

$$\sqrt{\frac{\hat{p}_1.\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2.\hat{q}_2}{n_2}}\,.$$

EXEMPLO

Sejam p_1 e p_2 as proporções reais de defeitos de um processo já existente e de um novo processo, respectivamente. Uma amostra aleatória de cada processo foi retirada com n_1 = 1500 e n_2 = 2000, obtendo-se :

$$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{75}{1500} = 0{,}05 \text{ e}$$

$$\hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{80}{2000} = 0{,}04$$

Uma estimativa pontual para p_1 - p_2 , a diferença entre as duas proporções pesquisadas é $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ = 0,05 - 0,04 = 0,01.

Um intervalo de confiança de 90% para p_1 - p_2 é dado por :

$$P\left(0{,}01 - 1{,}65\sqrt{\frac{0{,}05.0{,}95}{1500}+\frac{0{,}04.0{,}96}{2000}} < p_1 - p_2 < 0{,}01 + 1{,}65\sqrt{\frac{0{,}05.0{,}95}{1500}+\frac{0{,}04.0{,}96}{2000}}\right) = 0{,}90$$

$$P(\ -0{,}0017 < p_1 - p_2 < 0{,}0217\ ) = 0{,}90$$

Existe 90 % de confiança de que o intervalo construído contem a diferença entre as duas proporções p_1 - p_2 de defeitos dos processos. Observe que o <u>zero</u> está neste intervalo.

6.3 TESTES DE HIPÓTESES

6.3.1 INTRODUÇÃO

Um importante tipo de problema em Inferência Estatística é determinar se uma amostra pode ter vindo de uma população tendo uma distribuição parcial ou completamente especificada. Por exemplo, se sabemos que uma amostra veio de uma distribuição normal, é razoável dizer que ela veio de uma distribuição com média μ_0 ? Ou, se duas amostras vieram de distribuições normais, é razoável dizer que estas vieram de distribuições que têm médias iguais? Como estatísticas como estas são v.a's que têm suas próprias distribuições de probabilidade, afirmações sobre seus parâmetros devem ser feitas em termos de probabilidade.

6.3.2 HIPÓTESE ESTATÍSTICA

Uma hipótese estatística é uma afirmação sobre a distribuição (ou parâmetros) de uma ou mais variáveis aleatórias. Uma hipótese estatística pode ser verdadeira ou não.

Por exemplo, suponha que $\overline{X}$ seja a média de uma amostra de tamanho n retirada de uma distribuição $N(\mu , \sigma^2)$, onde σ^2 é conhecida e μ é desconhecida. Suponha que se deseje verificar se é razoável que esta amostra tenha vindo de uma população $N(\mu_0 , \sigma^2)$ considerando a possibilidade de que esta poderia ter vindo de alguma distribuição normal $N(\mu_1 , \sigma^2)$, onde $\mu_1 \neq \mu_0$. Podemos abreviar esta questão dizendo que desejamos testar a hipótese estatística :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

contra a alternativa $H_1 : \mu \neq \mu_0$ usando a amostra de tamanho n e a média $\overline{X}$.

H_0 é chamada de <u>Hipótese Nula</u> e H_1 é chamada de <u>Hipótese Alternativa</u>.

6.3.3 ERROS DO TIPO I E TIPO II

Em um teste de hipótese podem ocorrer dois tipos de erros :

ERRO TIPO I : rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira.

ERRO TIPO II :aceitar H_0 quando H_0 é falsa.

EXEMPLO (Meyer)

Um fabricante vem produzindo pinos para serem utilizados sob determinadas condições de trabalho. Verificou-se que a duração de vida (em horas) desses pinos é N (100,9). Um novo esquema de fabricação foi introduzido com o objetivo de aumentar a duração de vida desses pinos. Quer dizer, a expectativa é que a duração de vida X terá distribuição N (μ , 9) onde $\mu > 100$. (Admita que a variância continua a mesma). Deste modo, o fabricante e o comprador potencial desses pinos estão interessados em testar as seguintes hipóteses :

$H_0 : \mu = 100$

$H_1 : \mu > 100$ (estamos supondo que nosso processo não pode ser pior que o antigo)

ERRO TIPO I : Rejeitamos que a média seja 100 quando na realidade não houve melhora na qualidade dos pinos (na realidade a média continua sendo 100).

ERRO TIPO II : Aceitamos que a média é 100 (o processo continua o mesmo) quando na realidade a qualidade dos pinos melhora (a média é > 100).

As probabilidades dos dois tipos de erros serão α e β, respectivamente. A probabilidade α do ERRO TIPO I é chamado de NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA. Estas probabilidades, condicionadas à realidade estão resumidas no quadro abaixo :

		Realidade	
		H_0 verdadeira	H_0 falsa
Decisão	Aceitar H_0	Decisão Correta $1 - \alpha$	Erro Tipo II β
	Rejeitar H_0	Erro Tipo I α	Decisão Correta $1-\beta$

6.3.4 TESTE DE HIPÓTESE

Um teste de hipótese estatística é uma regra geral tal que , quando os valores de uma amostra são obtidos, leva à decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese considerada.

6.3.5 REGIÃO CRÍTICA (R .C.)

A faixa de valores da variável de teste que leva à rejeição de H_0 é denominada região crítica do teste. A faixa restante é chamada de região de aceitação (R.A.).

<u>OBSERVAÇÕES</u> :

(1) Os erros do tipo I e II estão relacionados. Um decréscimo na probabilidade de um geralmente resulta num acréscimo na probabilidade do outro.

(2) O tamanho da região crítica, e portanto a probabilidade de cometer um erro do tipo I, pode sempre ser reduzida ajustando os valores críticos.

(3) Um acréscimo no tamanho da amostra n reduzirá α e β simultaneamente.

(4) Se a hipótese nula é falsa, β atinge o máximo quando o valor verdadeiro de um parâmetro está perto do valor hipotetizado. Quanto maior a distância entre o valor verdadeiro e o valor hipotetizado, menor será β.

6.3.6 TESTE UNILATERAL E TESTE BILATERAL

Um teste de uma hipótese estatística onde a hipótese alternativa H_1 é <u>unilateral</u> como :

$H_0 : \theta = \theta_0$

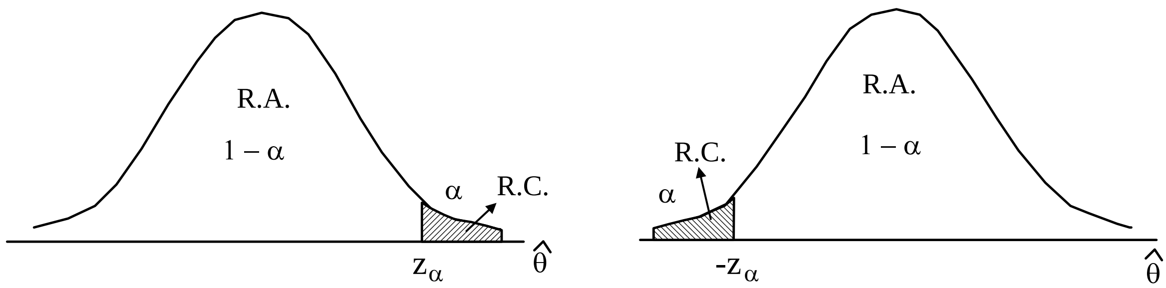
$H_1 : \theta > \theta_0$

ou

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta < \theta_0$

são chamados de TESTES UNILATERAIS. A região crítica para a hipótese alternativa $\theta > \theta_0$ cai inteiramente na cauda direita da distribuição, enquanto que para a hipótese alternativa $\theta < \theta_0$ a região crítica cai à esquerda.

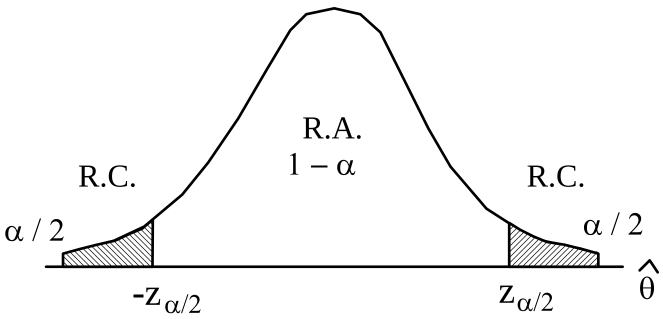


Um teste de hipótese onde a hipótese alternativa H_1 é <u>bilateral</u> tal como :

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta \neq \theta_0$

É chamado de TESTE BILATERAL



A construção de teste de hipótese para um parâmetro populacional pode ser colocada do seguinte modo. Existe uma v.a. X em uma dada população. Tem-se uma hipótese sobre determinado parâmetro θ dessa população. O objetivo do teste de hipótese é dizer, através de uma estatística $\hat{\theta}$ obtida de uma amostra , se a hipótese H_0 é aceitável ou não. Operacionalmente, isto é conseguido através de uma região R.C. Caso o valor da estatística do teste pertença a esta região, rejeitamos H_0 , caso contrário, não rejeitamos H_0 . Esta região é construída de modo que $P(\hat{\theta} \in R.C. / H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$ sendo α um valor fixado, geralmente 5% , 1% ou 0,1%.

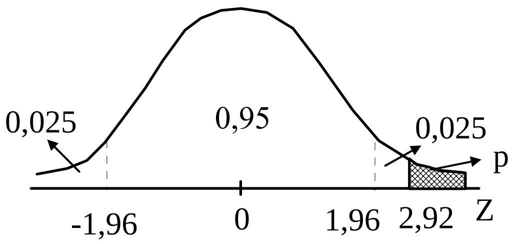
6.3.7 PASSOS PARA A CONSTRUÇÃO DE UM TESTE DE HIPÓTESE

1. Fixe qual a hipótese H_0 a ser testada e qual a hipótese alternativa H_1.
2. Use a teoria estatística e as informações disponíveis para decidir qual estatística (estimador) será usada para julgar a hipótese H_0.
3. Fixe a probabilidade α de cometer o erro do tipo I, e use este valor para construir a região R.C. Lembre que esta região é construída para a estatística definida no segundo passo, usando os valores hipotetizados por H_0.
4. Use as informações fornecidas pela amostra para encontrar o valor da estatística que levará à decisão.
5. Se o valor da estatística observado na amostra pertence à região crítica (R.C.), rejeite H_0 , caso contrário, não rejeite H_0.

6.3.8 O VALOR DE p

Quando realizamos um teste estatístico e verificamos que o valor da estatística do teste cai na R.C. , dizemos que o resultado do teste é estatisticamente significante (rejeitamos H_0).

Por exemplo, se num teste para o qual o nível de significância especificado é $\alpha = 0,05$ e o teste é bilateral, então a R.C. fica definida como no gráfico abaixo, considerando que a distribuição Normal seja indicada.



Quando realizamos um teste através de um programa computacional de Estatística encontramos, além do valor da estatística calculado, o valor de **p** (nível p) que é a probabilidade de se cometer o erro do tipo I, associado ao valor calculado da estatística. No exemplo acima, $p = 0,00241$ é a probabilidade de $Z > 2,92$. Como $p < 0,025$, neste caso, dizemos que o resultado é significante e rejeitamos H_0.

Tipicamente, em muitas Ciências, resultados que produzem $p \leq 0,05$ são considerados estatisticamente significantes, mas lembre que este nível de significância ainda envolve uma probabilidade de erro razoavelmente grande (5%). Resultados que são significantes ao nível de $p \leq 0,01$ são estatisticamente significantes e níveis de $p \leq 0,005$ ou $p \leq 0,001$ considerados "altamente" significantes. Estas classificações são meramente arbitrárias e são convenções informalmente baseadas em experiência de pesquisa de modo geral.

6.3.9 TESTE SOBRE A MÉDIA DE UMA POPULAÇÃO COM VARIÂNCIA CONHECIDA

Considere o problema de testar a hipótese de que a média μ de uma população com variância conhecida σ^2, é igual a um valor especificado μ_0 contra a alternativa bilateral de que a média não é igual a μ_0 :

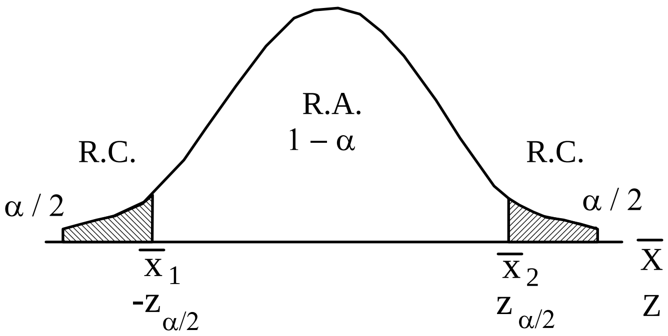
1. $H_0 : \mu = \mu_0$
2. $H_1 : \mu \neq \mu_0$

3. Uma estatística apropriada sobre a qual baseamos nosso critério de decisão é a v.a. $\overline{X}$. Já sabemos que $\overline{X}$: N (μ , σ^2/n) e que $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$.

4. Se usamos o nível de significância α, é possível encontrar dois valores críticos $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$ tais que $\overline{x}_1 < \overline{X} < \overline{x}_2$ define a região de aceitação e as duas caudas da distribuição $\overline{X} > \overline{x}_1$ e $\overline{X} > \overline{x}_2$ constituem a região crítica R.C. A região crítica pode ser dada em termos de valores de Z fazendo :

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

5. Portanto, para um nível de significância α , a R.C. é definida por :



6. Da população, selecionamos uma amostra aleatória da tamanho n e calculamos a média $\overline{X}$ e o valor de Z correspondente, sob H_0 verdadeira , isto é :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

7. Se $\overline{X}$ da amostra (ou Z calculado) cair na região crítica R.C. concluímos que H_0 será rejeitada, ou seja, aceitamos que $\mu \neq \mu_0$.

<u>OBSERVAÇÃO</u> :

O procedimento de teste descrito acima é equivalente a encontrar um intervalo de confiança de (1- α).100% para μ e aceitar H_0 se μ_0 cair no intervalo. Se cair fora do intervalo, rejeitamos H_0 em favor da hipótese alternativa H_1.

EXEMPLO

Um fabricante de material esportivo desenvolve uma nova linha de pesca sintética sobre a qual ele afirma que tem resistência média à ruptura de 8 Kg com um desvio padrão de 0,5 Kg. Teste a hipótese de que μ = 8 Kg, contra a hipótese de que $\mu \neq$ 8 Kg, se uma amostra de 50 linhas foi testada e apresentou uma média de resistência à ruptura de 7,8 Kg. Use um nível de 0,01 de significância.

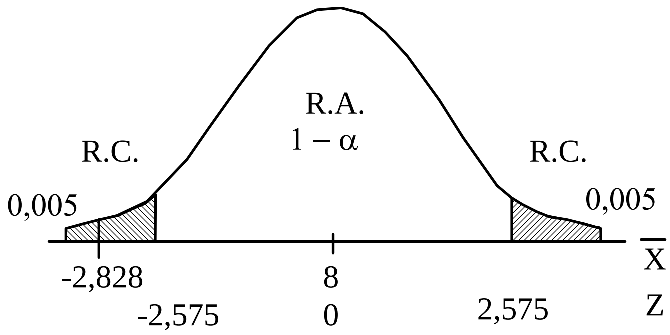
Solução :

1º) $H_o : \mu = 8$

$H_1 : \mu \neq 8$

2º) $\overline{X} : N(\mu , \sigma^2/n)$. Se H_0 é verdadeira, $\overline{X} : N (8 ; 0{,}5^2/50)$

3º) Para α = 0,01 a R.C. será dada por Z < -2,575 ou Z > 2,575



4º) $\overline{X} = 7{,}8$

n = 50

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{7{,}8 - 8}{0{,}5 / \sqrt{50}} = -\ 2{,}828$$

5º) Conclusão : Rejeitamos H_0 e concluímos que a resistência média à ruptura não é igual a 8 Kg. Esta média é menor do que 8 Kg. O valor de p neste caso é de p = 0,00240 ou seja menor do que 0,005.

6.3.10 TESTE PARA PROPORÇÃO

Temos uma população e temos como hipótese sobre a proporção p de elementos portadores de uma característica.

1º) $H_0 : p = p_0$

O problema fornece informações sobre a alternativa, que pode ter uma das 3 formas :

$H_1 : p \neq p_0$ (bilateral)

$H_1 : p > p_0$ (unilateral à direita)

$H_1 : p < p_0$ (unilateral à esquerda)

2º) A estatística a ser usada é $\hat{p}$, a proporção da amostra.

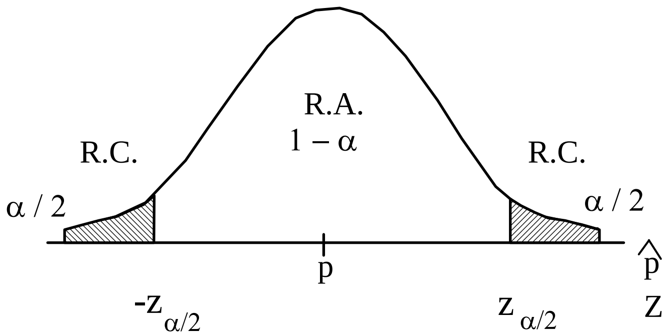
Sabemos que :

$$\hat{p} : N\left(p\, ,\ \frac{p.q}{n}\right)$$

3º) Fixado um valor de α, devemos construir a R.C. para p na suposição de que os parâmetros definidos em H_0 sejam verdadeiros. Assim :

$$\hat{p} : N\left(p_0\, ,\ \frac{p_0.q_0}{n}\right) \quad \text{e}$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.q_0}{n}}}$$



4º) Calculamos o valor $\hat{p}$ da amostra e o correspondente valor de Z.

5º) Rejeitamos H_0 se o valor de Z calculado cair na R.C., caso contrário, aceitamos H_0.

<u>EXEMPLO</u>

Um caçador de faisão afirma que ele acerta 80% dos pássaros em que ele atira. Você concorda com esta afirmação se num dia qualquer ele acerta 9 dos 15 pássaros em que ele atira ? Use 0,05 como nível de significância.

Solução :

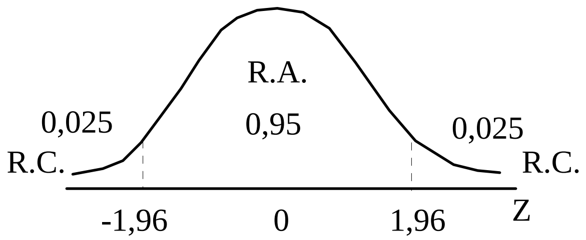
1º) $H_0 : p = 0{,}8$

$H_1 : p \neq 0{,}8$

2º) $\hat{p} = N\left(p\ ,\ \dfrac{p.q}{15}\right)$

3º) Para $\alpha = 0{,}05$ a região crítica fica definida por valores de Z tais que Z < -1,96 ou Z > 1,96. Sob a hipótese nula H_0 :

$\hat{p} : N\left(0{,}8\ ,\ \dfrac{0{,}8.0{,}2}{15}\right)$



4º) Da amostra tiramos que :

$$\hat{p} = \frac{9}{15} \qquad \text{e} \qquad Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.q_0}{n}}} = \frac{9/15 - 0{,}8}{\sqrt{\dfrac{0{,}8.0{,}2}{15}}} = -1{,}94$$

5º) Não rejeitamos H_0 e concluímos que não há razão para duvidar da afirmação do caçador.

6.3.11 TESTE PARA DIFERENÇA ENTRE DUAS PROPORÇÕES

É comum termos que testar a hipótese de que duas proporções p_1 e p_2 são iguais. O procedimento de teste é o seguinte :

1º) $H_0 : p_1 = p_2$ (ou $p_1 - p_2 = 0$)

$H_1 : p_1 \neq p_2$ (bilateral)

ou $H_1 : p_1 > p_2$ (unilateral à direita)

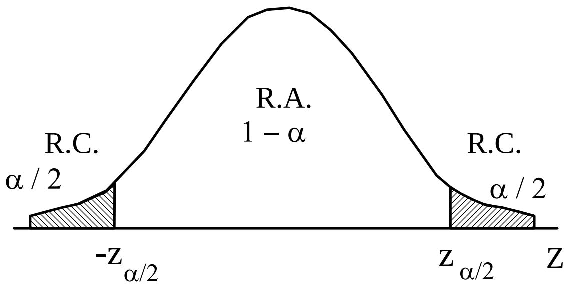
ou $H_1 : p_1 < p_2$ (unilateral à esquerda)

2º) A estatística a ser usada é $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$.

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 : N\left(p_1 - p_2 \; , \; \frac{p_1.q_1}{n_1} + \frac{p_2.q_2}{n_2}\right)$$

3º) Fixado α e sob H_0 :

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}.\hat{q}.\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$



4º) Calcule :

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} \qquad \text{e} \qquad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$$

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}.\hat{q}.\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

<u>EXEMPLO</u>

Uma votação será feita entre os residentes de uma cidade e a região rural ao redor desta cidade para determinar se um projeto químico deverá ser construído. A construção é dentro dos limites da cidade e por esta razão muitos eleitores do campo sentem que o projeto passará por causa da grande proporção dos eleitores da cidade, os quais são favoráveis. Para determinar se existe diferença significante na proporção de eleitores da cidade e do campo a favor do projeto, uma amostragem foi feita. Se 120 de 200 eleitores da cidade são a favor do projeto e 240 de 500 eleitores do campo são a favor, você concordaria que a proporção de eleitores da cidade favoráveis ao projeto é maior do que a proporção de eleitores do campo favoráveis ao projeto ? Use α = 0,025.

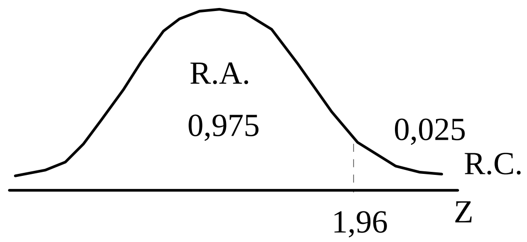
Solução :

1º) $H_0 : p_1 = p_2$

$H_1 : p_1 > p_2$ (unilateral)

2º) $\alpha = 0{,}025$

Região Crítica :



3º) Cálculos :

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{120}{200} = 0{,}6$$

$$\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{240}{200} = 0{,}48$$

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{120 + 240}{200 + 500} = 0{,}51$$

Assim :

$$Z = \frac{0{,}6 - 0{,}48}{\sqrt{0{,}51 . 0{,}49 . \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{500}\right)}} = 2{,}9$$

4º) Conclusão : Rejeitamos H_0 ($p_1 = p_2$) e concordamos que a proporção de eleitores da cidade favoráveis ao projeto é maior de que a proporção de eleitores do campo favoráveis ao projeto.

6.3.12 TESTE PARA DIFERENÇAS ENTRE DUAS MÉDIAS
(Variâncias Conhecidas)

Se μ_1 e μ_2 são as médias de duas populações, podemos testar a hipótese de que elas sejam iguais. O procedimento é o seguinte :

1º) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $(\mu_1 - \mu_2 = 0)$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (bilateral)

ou $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ (unilateral à direita)

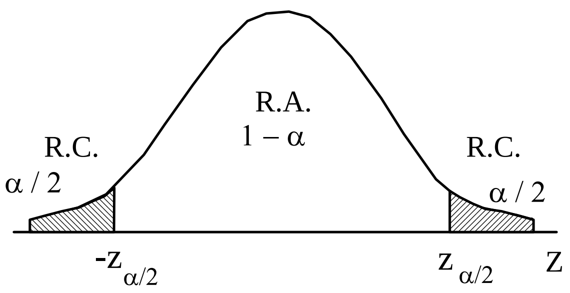
ou $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ (unilateral à esquerda)

2º) A estatística a ser usada é $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$.

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = N\left(\mu_1 - \mu_2\ ,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

3º) Fixado α e sob H_0 :

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$



4º) Calculamos as médias $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ e o valor de Z.

5º) Rejeitamos H_0 se o valor de Z calculado cair na R.C., caso contrário aceitamos H_0.

EXEMPLO

Um experimento foi realizado para comparar o desgaste abrasivo de dois diferentes materiais laminados. A variância da medida do desgaste (codificado) é conhecida como sendo 16 para o material 1 e 25 para o material 2. No experimento, 20 peças do material 1 foram testadas, expondo cada peça a uma máquina e medindo o desgaste e 30 peças do material 2 foram testadas da mesma forma. Em cada caso, a profundidade do desgaste foi observada. A amostra do material 1 deu uma média (codificada) de 85 unidades, enquanto que a amostra do material 2 deu uma média de 81. Teste, ao nível de significância de 0,10, a hipótese de que os dois tipos de materiais apresentam a mesma média de desgaste abrasivo.

1º) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (unilateral)

2º) $\alpha = 0,10$

Região Crítica :

$Z <= -1,96$ e $Z > 1,96$.

3º) Cálculos :

$X_1 = 85$ e $X_2 = 81$, $n_1 = 20$ e $n_2 = 30$, $\sigma_1 = 4$ e $\sigma_2 = 5$.

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = (85 - 81) / \quad (16/20 + 25/30) = 3,1298$$

4º) Conclusão : Rejeitamos H_0 e concluímos, ao nível de 10% de significância, que as médias de desgaste abrasivo não é a mesma para os dois tipos de materiais. O material 1 apresenta uma média significativamente maior de desgaste do que o material 2.