Introdução a Lógica Sentencial *

Jorge Petrúcio Viana
Departamento de Análise
IM–UFF

Sumário

*Versão de março de 2001.

1 Motivação

1.1 Um Exemplo

O texto em destaque a seguir é uma página típica de um livro de Matemática. Embora ele deva ser lido com toda a atenção, nosso objetivo é utilizá-lo apenas como referência para algumas questões e conceitos que serão introduzidos.

Números Primos e Compostos

Se a, b e c são inteiros tais que $a \cdot b = c$, dizemos que a e b são *fatores* (ou *divisores*) de c e que c é um múltiplo de a e b. Como $3 \times 4 = 12$, o número 3 é um fator de 12 e o número 12 é um múltiplo de 3. Também 4 é um fator de 12 e 12 é um múltiplo de 4. O número 12 tem ainda outros fatores. Por exemplo, -2, já que $(-2) \times (-6) = 12$.

Consideremos agora os inteiros maiores que 1, isto é, $2, 3, 4, \ldots$ Cada um destes números pode ser classificado como *primo* ou *composto*. Um número inteiro positivo p, maior que 1, é *primo* se os únicos inteiros positivos que são fatores de p são o 1 e o próprio p. Todo número inteiro positivo maior que 1 que não é primo é *composto*. Assim, n é composto se possui fatores diferentes de 1 e de n. Por exemplo, 5 é primo, já que seus únicos fatores positivos são 1 e 5. Por outro lado, 10 é composto, pois 2 é um fator de 10, e 2 é diferente de 1 e 10.

Teorema *Todo número inteiro positivo maior que* 1 *tem um fator primo.*

Prova: Seja n um inteiro positivo maior que 1. Sabemos que n é primo ou n não é primo. Se n é primo, como $1 \cdot n = n$, então n é um fator de n e o teorema está provado. Se n não é primo, então n é composto. Assim:

$$n = n_1 \cdot n_2$$

onde n_1 e n_2 são inteiros positivos menores que n. Se n_1 é primo, o teorema está provado. Se não:

$$n_1 = n_3 \cdot n_4$$

onde n_3 e n_4 são inteiros positivos menores que n_1. Novamente, se n_3 é primo, o teorema está provado. Se não, então:

$$n_3 = n_5 \cdot n_6$$

onde n_5 e n_6 são inteiros positivos menores que n_3. Generalizando o procedimento acima teremos, depois de alguns passos:

$$n_{2k-1} = n_{2k+1} \cdot n_{2k+2}$$

onde n_{2k+1} e n_{2k+2} são inteiros positivos menores que n_{2k-1}. Como, para qualquer valor de k:

$$n > n_1 > n_3 > \cdots > n_{2k-1} > 0 \text{ e } n = n_{2k+1} \cdot n_{2k+2} \cdot n_{2k} \cdot n_{2k-2-} \cdots n_6 \cdot n_4 \cdot n_2$$

este procedimento deve terminar, ou seja, deve existir um menor inteiro primo n_{2k+1} que é um fator de n. Assim, o teorema está provado.

As várias partes que compõem um texto de Matemática podem ser classificadas, em sentido estrito, nas seguintes categorias: *definição*, *exemplo*, *teorema* e *prova* (de um teorema). De uma maneira geral, a Lógica Matemática pode ser considerada como o estudo de certos aspectos relacionados a definições, teoremas e provas. Aqui, trataremos apenas de certas noções associadas a teoremas e provas. E, inicialmente, faremos algumas observações sobre um aspecto particular das provas.

1.2 Verdades Lógicas

O primeiro aspecto das provas, que investigaremos, está exemplificado no teorema que aparece no texto em destaque, apresentado anteriormente. A prova desse teorema inicia do seguinte modo:

Seja n um inteiro positivo maior que 1. Sabemos que n é primo ou n não é primo.

Ou seja, nesta prova tomamos um número inteiro positivo qualquer maior que 1 e apresentamos a seguinte alternativa: ele é primo ou não é primo. No primeiro caso, concluímos trivialmente que ele possui um fator primo. No segundo, fornecemos uma explicação pormenorizada de como, após sucessivas fatorações, podemos encontrar um fator primo do tal número. Um passo fundamental da prova foi a consideração da sentença:

n é primo ou n não é primo.

que é uma sentença verdadeira.

Examinando esta sentença um pouco melhor, vemos que ela afirma duas possibilidades complementares e excludentes. Ou seja, dado um inteiro positivo qualquer maior que 1, ou ele é primo ou ele não é primo. Ora, como qualquer número natural é primo ou não, a sentença é verdadeira.

Observe que o que foi dito acima não é uma característica apenas de números e de propriedades de números. De fato, dada uma propriedade P qualquer e um objeto a para o qual P faça sentido, a possui ou não possui a propriedade P. Assim, do mesmo modo que é verdadeira a sentença acima são também verdadeiras as sentenças:

i) 2 é par ou 2 não é par.
ii) Tarski é brasileiro ou Tarski não é brasileiro.
iii) O conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento ou o conjunto dos números perfeitos não possui um maior elemento.

Em resumo, queremos destacar os seguintes fatos:

1. Existem sentenças verdadeiras que possuem um tipo especial de verdade (que chamaremos de *verdade lógica*).

2. Este tipo especial de sentença verdadeira (que chamaremos de *sentença logicamente verdadeira*) é freqüentemente utilizada na prova de teoremas.

Assim, um primeiro passo nos estudos de Lógica Matemática é aprender a reconhecer sentenças logicamente verdadeiras. O reconhecimento de verdades lógicas é nossa motivação inicial e quase todos os conceitos que serão desenvolvidos visarão este fim.

2 Sintaxe

2.1 Formação de sentenças

Como vimos no parágrafo anterior, as sentenças:

2 é par ou 2 não é par.
Tarski é brasileiro ou Tarski não é brasileiro.
O conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento ou o conjunto dos números perfeitos não possui um maior elemento.

são logicamente verdadeiras porque afirmam duas possibilidades complementares e excludentes. Este fato nos leva a considerar que a verdade lógica de uma sentença está associada à maneira como ela foi formada. Assim, nosso primeiro passo no reconhecimento das verdades lógicas será o estudo da formação de sentenças. Inicialmente, estudaremos a formação de sentenças por meio das partículas não, e, ou, se...então e se, e somente se. Estas são algumas das partículas mais utilizadas na Linguagem Matemática.

Sentenças

Em seu nível mais elementar a lógica trata das sentenças e dos diversos modos de combiná-las.

Definição Uma *sentença* é uma expressão de uma dada linguagem que pode ser classificada como verdadeira ou falsa, de maneira exclusiva, em um dado contexto.

Exemplo 1 São exemplos de sentenças:

A cidade de Cubatão é poluída.
A Amazônia é um deserto.
Aristóteles é alto ou não.
Boole é e não é escocês.
Se algo é igual a si próprio e tudo é igual a si próprio, então Aristóteles e Boole são iguais.

As expressões acima são sentenças pois, no contexto usual, podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas. Em particular, a primeira e a terceira são verdadeiras, enquanto que a segunda e a quarta são falsas.

A definição acima restringe a aplicação da palavra ‘sentença’, quando utilizada Lógica. De uma maneira geral, as linguagens possuem outras expressões além daquelas classificadas como sentenças no sentido acima.

Exemplo 2 Não são exemplos de sentenças:

Estude para a prova.
Que prova difícil!
Quanto você tirou na prova?

As expressões acima não são sentenças pois não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas. São, respectivamente, uma frase imperativa, exclamativa e interrogativa.

Conectivos

Outra característica essencial a todas as sentenças é que, além de poderem ser classificadas como verdadeiras ou falsas, também podem ser utilizadas na formação de sentenças.

Exemplo 3 Sentenças podem ser combinadas para formar sentenças por meio de expressões como e, ou, mas, porém, que são aplicadas a duas sentenças. Por exemplo, dadas as sentenças:

A Matemática é uma ciência exata.
A Aritmética é um ramo da Matemática.
Frege formalizou a Aritmética.
A formalização de Frege é inconsistente.

por aplicações das expressões e, ou, mas, e porém, podemos formar as sentenças:

A Matemática é uma ciência exata e a Aritmética é um ramo da Matemática.
Frege formalizou a Aritmética mas a formalização de Frege é inconsistente.
Frege formalizou a Aritmética e a formalização de Frege é inconsistente, porém a Aritmética é um ramo da Matemática e a Matemática é uma ciência exata.

Também podemos formar sentenças a partir de sentenças, por aplicação de expressões como não, e é possível que, que são aplicadas a uma única sentença:

A Matemática não é uma ciência exata.
É possível que Frege tenha formalizado a Aritmética.
Frege formalizou a Aritmética e é possível que a formalização de Frege seja inconsistente.

Embora as expressões não, e, ou, mas, porém e é possível que não possuam todas a mesma classificação gramatical, do ponto de vista da Lógica todas possuem a mesma função, a saber, a de formar sentenças a partir de uma ou mais sentenças previamente dadas. Em Lógica, as expressões utilizadas para este fim recebem uma denominação especial.

Definição Um *conectivo* é uma expressão de uma dada linguagem, utilizada para formar sentenças a partir de sentenças dadas.

Exemplo 3 Dadas as sentenças 2 é par e $3 < 2$, podemos formar, por exemplo, as seguintes sentenças

2 é par e $3 < 2$.
2 é par ou $3 < 2$.
Se 2 é par, então $3 < 2$.
2 é par se, e somente se, $3 < 2$.
2 não é par.

Uma maneira adequada de se considerar os conectivos é pensar neles como operações. Uma *operação* é uma maneira de combinar elementos para formar novos elementos. Por exemplo, a operação de adição que associa aos números 1 e 2 o número 3. No caso dos conectivos os elementos operados são sentenças e o resultado obtido é uma nova sentença.

Exemplo 5 O não pode ser considerado como uma operação que associa, por exemplo, à sentença 2 é par a sentença 2 não é par. Assim, diferentemente da sua classificação gramatical usual, em Lógica, o não é classificado como conectivo.

Peso de um conectivo

Observe que no Exemplo 3, para formar a sentença 2 não é par, aplicamos o conectivo não a uma única sentença. Enquanto que para formar as sentenças

2 é par e $3 < 2$.

2 é par ou $3 < 2$.

Se 2 é par, então $3 < 2$.

2 é par se, e somente se, $3 < 2$.

aplicamos os conectivos e, ou, se...então e se, e somente se a duas sentenças. Os conectivos são classificados de acordo com o número de sentenças que necessitam para a formação de uma nova sentença.

Definição O *peso* de um conectivo é o número exato de sentenças utilizadas para formar uma nova sentença, por meio deste conectivo.

A tabela abaixo lista os pesos dos conectivos apresentados no Exemplo 5.

Conectivo	Peso
não	1
e	2
ou	2
se...então	2
se, e somente se	2

Embora todos os conectivos exerçam o mesmo papel na formação de sentenças, situações muito diferentes podem acontecer ao se avaliar as sentenças obtidas por aplicação destes conectivos. Assim, devido a grande quantidade de conectivos e a diversidade na maneira de usá-los na avaliação de sentenças, numa primeira abordagem, não se faz um estudo geral dos conectivos. Ao invés disto, o que fazemos é fixar apenas um pequeno grupo de conectivos, que possuam características afins, e estudá-los de maneira detalhada. Como já dissemos anteriormente, nosso objetivo é estudar certos aspectos lógicos da atividade matemática. Assim, consideraremos apenas os conectivos não, e, ou, se...então e se, e somente se. Estes conectivos são considerados como os mais adequados no tratamento lógico do raciocínio matemático. Salvo mensão explícita em contrário, sempre que usarmos a palavra ‘conectivo’ estaremos nos referindo a um dos conectivos não, e, ou, se...então e se, e somente se.

Sentenças atômicas e sentenças moleculares

Podemos agora classificar as sentenças de acordo com o fato de terem sido ou não obtidas a partir de outras sentenças por meio de conectivos.

Definição Uma sentença é *atômica* se nela não ocorrem conectivos.

As sentenças atômicas são consideradas as *sentenças básicas*, isto é, aquelas a partir das quais todas as outras sentenças podem ser formadas.

Exemplo 4 São exemplos de sentenças atômicas:

3 é primo.
2 é maior que 0.
Todo homem é mortal.
É necessário urgência no envio desta carta.

As sentenças acima são atômicas pois em nenhuma delas ocorre não, e, ou, se...então ou se, e somente se.

Definição Uma sentença é *molecular* se não é atômica, isto é, se nela ocorre pelo menos um conectivo.

Exemplo 5 São exemplos de sentenças moleculares:

5 não é primo.
Se Gotlob Frege estiver certo e Bertrand Russell resolver o paradoxo, então a Matemática será apenas um ramo da Lógica.

As sentenças são moleculares pois na primeira ocorre o conectivo não, enquanto que na segunda ocorrem os conectivos e e se...então.

Classificação das sentenças moleculares

Podemos ainda classificar as sentenças moleculares pelo modo como foram obtidas a partir de outras sentenças por aplicação dos conectivos.

No caso do não, temos a seguinte definição:

Definição Uma sentença é uma *negação* se é obtida de uma outra sentença por intermédio do conectivo não.

Exemplo 9 A sentença não é o caso que João gosta de Maria, ou seja, João não gosta de Maria é a negação da sentença João gosta de Maria. Neste exemplo, salientamos o uso freqüente da expressão não é o caso que como não.

Observe que como o não é um conectivo de peso 1, para se obter uma negação o não deve ser aplicado a uma única sentença. Assim, temos a seguinte definição:

Definição A sentença utilizada na formação de uma negação é chamada a *sentença negada* ou *componente* da negação. De uma maneira geral, se α é uma sentença qualquer, dizemos que α é a *sentença negada* da negação não é o caso que α.

Exemplo 10 Na negação não é o caso que $1+(1+1) \neq 3 \times 1$, ou seja, não é o caso que $1+(1+1)$ não é igual a 3×1, a sentença negada é $1+(1+1)$ não é igual a 3×1, que por sua vez é uma negação cuja sentença negada é $1+(1+1)$ é igual a 3×1. Neste exemplo, salientamos o uso freqüente, em Matemática, de uma simbologia especial para a negação de sentenças.

No caso do e, temos a seguinte definição:

Definição Uma sentença é uma *conjunção* se é obtida de duas outras sentenças por intermédio do conectivo e.

Exemplo 11 A sentença 3 não divide 6 nem 8, ou seja, 3 não divide 6 e 3 não divide 8, é a conjunção da sentença 3 não divide 6 com a sentença 3 não divide 8. Estas por sua vez são, respectivamente, as negações das sentenças 3 divide 6 e 3 divide 8. Neste exemplo salientamos a necessidade de algumas vezes termos de reescrever as sentenças para explicitar sua formação a partir dos conectivos.

Observe que como o e é um conectivo de peso 2, para se obter uma conjunção o e deve ser aplicado a duas sentenças. Assim, temos a seguinte definição:

Definição As sentenças utilizadas na formação de uma conjunção são chamadas *componentes* da conjunção. De uma maneira geral, se α e β são sentenças quaisquer, dizemos que α é a *primeira componente* e que β é a *segunda componente* da conjunção α e β.

Exemplo 12 A sentença $3 \times 2 = 6$ e $2+2 \neq 5$ é uma conjunção, pois foi obtida a partir das sentenças componentes $3 \times 2 = 6$ e $2+2 \neq 5$ pelo uso do conectivo e. Dizemos ainda que a sentença $3 \times 2 = 6$ é a *primeira componente* da conjunção e a sentença $2+2 \neq 5$ é a *segunda componente* da conjunção.

No caso do ou, temos a seguinte definição:

Definição Uma sentença é uma *disjunção* se for obtida de duas outras sentenças por intermédio do conectivo ou.

Exemplo 13 A sentença 2 é par ou não é natural, ou seja, 2 é par ou 2 não é natural, é a disjunção da sentença 2 é par com a sentença 2 não é natural.

Observe que, como o ou é um conectivo de peso 2, para se obter uma disjunção o ou deve ser aplicado a duas sentenças. Assim, temos a seguinte definição:

Definição As sentenças utilizadas na formação de uma disjunção são chamadas *componentes* da disjunção. De uma maneira geral, se α e β são sentenças quaisquer, dizemos que α é a *primeira componente* e que β é a *segunda componente* da disjunção α ou β.

Exemplo 14 A sentença 2 é um número par ou eu como o meu chapéu é uma disjunção, pois foi obtida a partir das sentenças componentes 2 é um número par e eu vou comer o meu chapéu pelo uso do conectivo ou. Dizemos ainda que a sentença 2 é um número par é a *primeira componente* da disjunção e a sentença eu vou comer o meu chapéu é a *segunda componente* da disjunção.

No caso do se...então, temos a seguinte definição:

Definição Uma sentença é uma *implicação* se é obtida de duas outras sentenças por intermédio do conectivo se...então.

Exemplo 15 A sentença O sistema de Frege é inconsistente se Bertrand Russell descobriu um paradoxo, ou seja, se Bertrand Russell descobriu um paradoxo, então o sistema de Frege é inconsistente, é a implicação da sentença o sistema de Frege é inconsistente pela sentença Bertrand Russell descobriu um paradoxo. Neste exemplo salientamos o uso freqüente da expressão se como se...então.

Observe que como o se...então é um conectivo de peso 2, para se obter uma implicação o se...então deve ser aplicado a duas sentenças. Assim, temos a seguinte definição:

Definição As sentenças utilizadas na formação de uma implicação são chamadas *componentes* da implicação. De uma maneira geral, se α e β são sentenças quaisquer, dizemos que α é o *antecedente* e que β é o *conseqüente* da implicação se α, então β.

Exemplo 16 A sentença se Poincaré acha a Lógica importante, então todo mundo acha a Lógica importante é uma implicação, pois foi obtida a partir das sentenças componentes Poincaré acha a Lógica importante e todo mundo acha a Lógica importante pelo uso do conectivo se...então. Dizemos ainda que a sentença Poincaré acha a Lógica importante é o *antecedente* da implicação e a sentença todo mundo acha a Lógica importante é o *conseqüente* da implicação.

Observe que, nesta caso, não dizemos *primeira* e *segunda* componentes.

No caso do se, e somente se, temos a seguinte definição:

Definição Uma sentença é uma *biimplicação* se é obtida de duas outras sentenças por intermédio do conectivo se, e somente se.

Exemplo 17 A sentença David Hilbert está errado se, e somente se, há um problema que não possui solução é a bimplicação das sentenças David Hilbert está errado e há um problema que não possui solução.

Observe que como o se, e somente se é um conectivo de peso 2, para se obter uma biimplicação o se, e somente se deve ser aplicado a duas sentenças. Assim, temos a seguinte definição:

Definição As sentenças utilizadas na formação de uma biimplicação são chamadas *componentes* da biimplicação. De modo geral, se α e β são sentenças quaisquer, dizemos que α é a *primeira componente* e que β é a *segunda componente* da biimplicação α se, e somente se β.

Exemplo 18 A sentença o número de átomos no universo é primo se, e somente se, não possui divisores próprios é uma biimplicação, pois foi obtida a partir das sentenças componentes o número de átomos no univeros é primo e o número de átomos no universo não possui divisores próprios pelo uso do conectivo se, e somente se. Dizemos ainda que a sentença o número de átomos no univeros é primo é a primeira componente da biimplicação e a sentença o número de átomos no universo não possui divisores próprios é a segunda componente da biimplicação.

2.2 Reescrita de Sentenças

Ambiguidade

Na Seção 2.1, classificamos as sentenças moleculares de acordo com a maneira como são formadas a partir de outras sentenças, por aplicação dos conectivos. Em alguns casos, as sentenças tiveram que ser reescritas, para que pudessem ser classificadas. Embora a reescrita de sentenças seja uma necessidade natural, na verdade, nem toda sentença pode ser trivialmente reescrita para que possamos classificá-la em uma das categorias definidas. Veremos agora que como a formação de sentenças usualmente não obedece a regras precisas, em certos casos, mesmo classificar uma sentença como atômica ou molecular pode ser uma tarefa difícil.

Exemplo 18 Vejamos alguns exemplos.

a) Considere a sentença 4 é diferente de 0. Se não levarmos em conta que o significado da expressão 'ser diferente de' é o mesmo que o da expressão 'não ser igual a', concluímos que a sentença é atômica pois nela não ocorrem conectivos. Por outro lado, se levarmos em conta a identidade destes significados, a sentença poderá ser reescrita como 4 não é igual a 0 e daí ser classificada como molecular pois nela ocorre o conectivo não.

b) Considere a sentença Richard Dedekind e Giuseppe Peano são casados. Levando em conta o significado da sentença, concluímos que esta deve ser reescrita como Richard Dedekind é casado e Giuseppe Peano é casado, pois, obviamente, não estamos querendo dizer que ambos são casados um com o outro e sim que cada um deles é casado com sua respectiva esposa. Portanto, esta sentença é uma conjunção e deve ser classificada como molecular.

Por outro lado, considere a sentença Kurt Gödel e Hao Wang são amigos. Levando em conta o significado da sentença, concluímos que esta não pode ser reescrita como Kurt Gödel é amigo e Hao Wang é amigo como fizemos com a sentença anterior. De fato, quando dizemos que duas pessoas são amigas, estamos querendo dizer que elas são amigas uma da outra e não atribuindo uma propriedade a cada uma delas isoladamente. Assim, esta sentença deve ser classificada como atômica pois a expressão e que nela ocorre não deve ser confundida com o conectivo e.

c) Considere a sentença Maria e João são casados. Aqui temos um caso ambíguo. De fato, levando em conta somente o significado da sentença, não podemos concluir se ela deve ou não ser reescrita como Maria é casada e João é casado. Quando dizemos que um homem e uma mulher são casados podemos tanto estar querendo dizer que eles são casados um com o outro quanto que eles são casados, mas com pessoas diferentes. Tudo depende do contexto em que a sentença está inserida. Assim, esta sentença tanto pode ser usada para afirmar uma relação entre duas pessoas quanto para atribuir uma propriedade a cada uma delas isoladamente. Dependendo do contexto associado, esta sentença pode ser classificada tanto como atômica quanto molecular.

d) Considere a sentença traga sua esposa ou venha sozinho e tenha uma noite agradável. Levando em conta a maneira como está escrita, esta sentença pode ser lida de dois modos diferentes. De fato, considerando que a sentença é obtida a partir das sentenças traga sua esposa e venha sozinho e tenha uma noite agradável por aplicação do conectivo ou, a sentença pode ser lida como traga sua eposa, ou venha sozinho e tenha uma noite agradável. Por outro lado, considerando que a sentença é obtida a partir das sentenças traga sua esposa ou venha sozinho e tenha uma noite agradável por aplicação do conectivo e, a sentença pode ser lida como traga sua esposa ou venha sozinho, e tenha uma noite agradável. No primeiro caso, a sentença é uma disjunção. No segundo, a sentença é uma conjunção. Examinando os significados de cada sentença reescrita, concluímos que cada uma delas possui um conteúdo bastante diferente do da outra.

Os exemplos anteriores mostram algumas sentenças que podem ser consideradas ambíguas em relação a maneira como são formadas. Esta ambiguidade decorre basicamente do seguinte:

- Presença implícita de conectivos (no sentido lógico). Tal é o caso do exemplo 18.
- Presença explícita de expressões consideradas como conectivos (no sentido lógico) desempenhando um papel diferente daquele desempenhado pelos conectivos. Tal é o caso do exemplo 19.
- Ausência de uma notação que indique precisamente de que maneira esta sentença foi formada a partir de senteças anteriores. Tal é o caso do exemplo 20.

A presença de ambigüidades acarreta a possibilidade de leituras distintas para uma mesma sentença e isto pode acarretar análises lógicas incompatíveis. Somos levados, então, a introduzir a reescrita de sentenças, de modo que sua formação obedeça a regras precisas e ambigüidades sejam evitadas.

Regras de reescrita

Na tentativa de evitar ambigüidades, é usual reescrevermos as sentenças de modo que sua formação obedeça a regras precisas. Estas regras decorrem das seguintes considerações:

- Como estamos considerando apenas sentenças que são formadas a partir de outras sentenças pelo uso dos conectivos, as sentenças atômicas são consideradas como as unidades básicas a partir das quais todas as outras sentenças são formadas. Assim, um primeiro passo na formação de sentenças não ambígüas é explicitar as sentenças atômicas que estão sendo utilizadas.
- Para eliminar ambigüidades decorrentes dos vários usos dos conectivos em outras linguagens, na Linguagem da Lógica, o número, a forma e o uso dos conectivos na formação de sentenças moleculares são definidos precisamente.

- Para facilitar a reescrita e enfatizar que os conectivos estão sendo utilizados num sentido restrito, em relação a maneira como são usados em outras linguagens, na Linguagem da Lógica, os conectivos são simbolizados conforme a seguinte tabela:

Conectivo	Símbolo
não	$\neg$
e	$\wedge$
ou	$\vee$
se...então	$\rightarrow$
se, e somente se	$\leftrightarrow$

Temos, então, as seguintes regras de reescrita:

Regra 1 *Uma sentença atômica deve ser reescrita encerrada entre parênteses.*

Exemplo 8 Como não possuem a ocorrência de conectivos, as sentenças

7 é primo.
8 é maior que 0.
É necessário que Maria pegue o trem.
Todo homem é mortal.

são atômicas. Assim, devem ser reescritas encerradas entre parênteses:

(7 é primo)
(8 é maior que 0)
(é necessário que Maria pegue o trem)
(todo homem é mortal)

Regra 2 *Uma negação deve ser reescrita como $(\neg\alpha)$, onde α é a sentença negada, previamente reescrita.*

Exemplo 45
a) A negação 7 não é primo deve ser reescrita como $(\neg$(7 é primo)$)$. De fato, a sentença é obtida pela aplicação do não à sentença 7 é primo. Esta última sentença deve ser reescrita como (7 é primo). Assim, aplicando a Regra 2 a esta sentença atômica reescrita, temos a reescrita da negação.

b) A negação não é o caso que 7 não é primo deve ser reescrita como $(\neg(\neg$(7 é primo)$))$. De fato, a sentença é obtida pela aplicação do não à sentença 7 não é primo que deve ser reescrita como $(\neg$ (7 é primo)$)$. Assim, aplicando a Regra 2 a esta negação reescrita, temos a reescrita da negação original.

Regra 3 *Uma conjunção deve ser reescrita como $(\alpha \wedge \beta)$, onde α e β são suas componentes, previamente reescritas.*

Exemplo 23

a) A conjunção 3 não é primo e nem é maior que 0, ou seja, 3 não é primo e 3 não é maior que 0 deve ser reescrita como $((\neg(3 \text{ é primo})) \wedge (\neg(3 \text{ é maior que } 0)))$. De fato, a conjunção é obtida por aplicação do e às sentenças 3 não é primo e 3 não é maior que 0 que, segundo as regras anteriores, devem ser reescritas, respectivamente, como $(\neg(3 \text{ é primo}))$ e $(\neg(8 \text{ é maior que } 0))$. Aplicando agora a Regra 3 às duas sentenças reescritas, temos a reescrita da conjunção.

b) Como já discutimos anteriormente, a conjunção João e Maria foram à feira é ambígua pois não sabemos se devemos interpretá-la como João foi à feira e Maria foi à feira ou como João e Maria foram à feira, juntos. Esta ambiguidade de significado acarreta ambiguidade de formação, pois não sabemos decidir se ela deve ser classificada como atômica ou molecular. Para reescrever as sentenças onde ocorrem este tipo de ambiguidade, faremos a convenção de considerá-las sempre como sentenças moleculares, mesmo que haja risco de mudarmos o conteúdo da sentença.

Assim, a sentença deve ser reescrita como $((\text{João foi à feira}) \wedge (\text{Maria foi à feira}))$.

Regra 4 Uma disjunção deve ser reescrita como $(\alpha \vee \beta)$, onde α e β são a primeira e a segunda componentes, previamente reescritas.

Exemplo 24

a) A disjunção 2 não é maior que 0 ou, 3 é primo e 2 é maior que 0 deve ser reescrita como $((\neg(2 \text{ é maior que } 0)) \vee ((3 \text{ é primo}) \wedge (2 \text{ é maior que } 0)))$.

b) A conjunção 2 não é maior que 0 ou 3 é primo e, 2 é maior que 0 deve ser reescrita como $((\neg(2 \text{ é maior que } 0)) \vee (3 \text{ é primo})) \wedge (2 \text{ é maior que } 0))$. Observe que, neste caso, a primeira componente é uma disjunção que foi reescrita de acordo com a Regra 4.

Regra 5 Uma implicação deve ser reescrita como $(\alpha \rightarrow \beta)$, onde α e β são a antecedente e a consequente, previamente reescritas.

Exemplo 25

a) Considerando o significado da sentença João vai à praia sempre que faz sol concluímos que ela deve ser reescrita como se faz sol, então João vai à praia. Assim, a sentença original é uma implicação que deve ser reescrita como $((\text{faz sol}) \rightarrow (\text{João vai à praia}))$. Neste exemplo salientamos o uso da expressão sempre que como se...então.

b) Considerando o significado da sentença caso chova, João não vai à piscina, concluímos que ela deve ser reescrita como se chover, então João não vai à piscina. Assim, a sentença original é uma implicação que deve ser reescrita como $((\text{chove}) \rightarrow (\neg\ (\text{Joaõ vai à piscina})))$. Neste exemplo salientamos o uso da expressão caso como se...então.

Regra 6 *Uma biimplicação deve ser reescrita como $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, onde α e β são suas componentes, previamente reescritas.*

Exemplo 13 A biimplicação Paulo emagrecerá se, e somente se, não beber muito refrigerante e não comer macarrão deve ser reescrita como $((\text{Paulo emagrece}) \leftrightarrow (\neg\ (\text{Paulo não bebe muito refrigerante})) \wedge (\neg(\text{Paulo come macarrão})))$. Neste exemplo salientamos que na análise lógica das sentenças, não estamos levando em conta o tempo verbal. Assim, sempre que possível, as as sentenças devem ser reescritas com o verbo no presente do indicativo.

2.3 Simbolização de Sentenças

Voltando às sentenças:

2 é par ou 2 não é par.
Tarski é brasileiro ou Tarski não é brasileiro.
O conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento ou o conjunto dos números perfeitos não possui um maior elemento.

observamos que todas são disjunções e que são reescritas como:

((2 é par) $\vee$ ($\neg$ (2 é par)))
((Tarski é brasileiro) $\vee$ ($\neg$ (Tarski é brasileiro)))
((o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento) $\vee$ ($\neg$ (o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento)))

Examinaremos agora cada uma em separado.

1. A sentença ((2 é par) $\vee$ ($\neg$ (2 é par))) é a disjunção da sentença atômica (2 é par) com a sentença ($\neg$ (2 é par)), que é a negação de (2 é par). Como a sentença apresenta duas alternativas das quais a primeira é verdadeira, a sentença é verdadeira.

2. A sentença ((Tarski é brasileiro) $\vee$ ($\neg$ (Tarski é brasileiro))) é a disjunção da sentença (Tarski é brasileiro), que é atômica, com a sentença ($\neg$ (Tarski é brasileiro)), que é a negação de (Tarski é brasileiro). Como a sentença apresenta duas alternativas das quais a segunda é verdadeira, a sentença é verdadeira.

3. A sentença ((o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento) $\vee$ ($\neg$ (o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento))) é a disjunção da sentença atômica (o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento) com a sentença ($\neg$ (o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento)) que é a negação de (o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento).

Esta sentença também apresenta duas alternativas das quais uma deve ser verdadeira. Mas, até o momento em que este texto foi escrito, a questão da existência de uma maior número perfeito ainda não havia sido resolvida. Assim, não sabemos qual das duas alternativas é a verdadeira. Mas, como já dissemos anteriormente, as duas alternativas apresentadas na sentença são complementares e excludentes. Por isso, uma delas, com certeza, é verdadeira (embora não saibamos qual) e por isso a sentença também é verdadeira.

Observe que a mesma explicação dada sobre a verdade da última sentença acima também pode ser aplicada às outras duas sentenças, ou seja, como as sentenças expressam alternativas excludentes e complementares as sentenças são verdadeiras, independente do conhecimento que possuímos sobre a verdade ou falsidade de suas componentes (embora nos dois primeiros casos tenhamos usado este conhecimento para determinar a verdade das sentenças). Dizemos, então, que a verdade das sentenças acima não depende do contexto em que as sentenças estão inseridas, mas apenas da maneira como foram formadas. E, por isso, são verdades lógicas.

Dada uma sentença α, nosso objetivo é determinar se α é uma verdade lógica, ou não. Para isso, devemos determinar se α é verdadeira em todos os contextos, ou não. O fato de uma sentença ser verdadeira em todos os contextos depende da maneira como a sentença foi formada e não do seu conteúdo. As regras de reescrita nos permitem explicitar como as sentenças são formadas. Vamos agora introduzir a simbolização das sentenças, como o passo final que nos permitir "esconder" o seu conteúdo e explicitar a sua forma.

Descrever um processo que possa ser aplicado na simbolização de sentenças não é uma tarefa muito fácil. Na verdade, por não sabermos, na maioria das linguagens, descrever como as sentenças são formadas, muitas vezes, dada uma sentença, é difícil decidir qual decisão tomar para obter uma simbolização adequada. Neste texto, sempre que possível, o processo de simbolização será efetuado segundo os seguintes passos:

Passo 1) Classificar a sentença como atômica ou molecular.

Passo 2) Classificar todos os conectivos que ocorrem na sentença.

Passo 3) Determinar se a sentença é negação, conjunção, disjunção, implicação ou biimplicação.

Passo 4) Reescrever a sentença de acordo com as regras de reescrita.

Passo 5) Simbolizar a sentença reescrita, substituindo as sentenças atômicas pelas letras p, q, r ou s (indexadas ou não), de modo que cada ocorrência de uma mesma sentença atômica seja substituída sempre pela mesma letra e que sentenças atômicas distintas sejam substituídas por sentenças atômicas distintas.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de simbolização, efetuados segundo os passos acima.

Exemplo 14

a) Rafael é feliz.

Efetuando o processo de simbolização, temos:

Passo 1. Atômica.

Passo 2. Não pode ser aplicado.

Passo 3. Não pode ser aplicado.

Passo 4. (Rafael é feliz)

Passo 5. A sentença pode ser simbolizada como p, onde p : (Rafael é feliz).

b) Rafael é feliz e Júlia gosta dele.

Primeiramente, a sentença deve ser reescrita como Rafael é feliz e Júlia gosta de Rafael. Efetuando o processo de simbolização, temos:

Passo 1. Molecular.

Passo 2. Possui ocorrência do conectivo e.

Passo 3. Conjunção.

Passo 4. ((Rafael é feliz) $\wedge$ (Júlia gosta de Rafael))

Passo 5. A sentença pode ser simbolizada como $(p \wedge q)$, onde p : (Rafael é feliz) e q : (Júlia gosta de Rafael).

Observe que esta sentença não pode ser simbolizada como $(p \wedge p)$, pois as sentenças atômicas que a compõem são distintas.

c) Rafael é feliz caso Júlia goste de Rafael.

Primeiramente, a sentença deve ser reescrita como Se Júlia gosta de Rafael, então Rafael é feliz. Efetuando o processo de simbolização, temos:

Passo 1. Molecular.

Passo 2. Possui ocorrência do conectivo se...então.

Passo 3. Implicação.

Passo 4. ((Júlia gosta de Rafael) $\rightarrow$ (Rafael é feliz))

Passo 5. A sentença pode ser simbolizada como $(p \rightarrow q)$, onde p : (Júlia gosta de Rafael) e q : (Rafael é feliz).

Neste exemplo ilustramos o uso da expressão caso como se...então.

d) Rafael é feliz pois Júlia gosta dele.

Primeiramente, a sentença deve ser reescrita como Júlia gosta de Rafael, e se Júlia gosta de Rafael, então Rafael é feliz.

Efetuando o processo de simbolização, temos:

Passo 1. Molecular.

Passo 2. Possui ocorrência dos conectivos e e se...então.

Passo 3. Conjunção cuja segunda componente é uma implicação.

Passo 4. (Júlia gosta de Rafael $\wedge$ ((Júlia gosta de Rafael) $\rightarrow$ (Rafael é feliz)))

Passo 5. A sentença pode ser simbolizada como $((p \wedge (p \rightarrow q))$, onde p : (Júlia gosta de Rafael) e q : (Rafael é feliz).

Neste exemplo ilustramos o uso da expressão pois como uma combinação dos conectivos e e se...então.

e) Rafael é feliz, dado que Júlia gosta de Rafael e ela é feliz.

Primeiramente, a sentença deve ser reescrita como Júlia gosta de Rafael e Júlia é feliz, e se Júlia gosta de Rafael e Júlia é feliz, então Rafael é feliz.

Efetuando o processo de simbolização, temos:

Passo 1. Molecular.

Passo 2. Possui ocorrência dos conectivos e e se...então.

Passo 3. Conjunção cuja primeira componente é uma conjunção e cuja segunda componente é uma implicação.

Passo 4. (((Júlia gosta de Rafael) $\wedge$ (Júlia é feliz)) $\wedge$ (((Júlia gosta de Rafael) $\wedge$ (Júlia é feliz)) $\rightarrow$ (Rafael é feliz.)))

Passo 5. A sentença pode ser simbolizada como $((p \wedge q) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow r))$, onde p : (Júlia gosta de Rafael), q : (Júlia é feliz) e r : (Rafael é feliz).

f) $2 + 2 \neq 4$

Pode ser simbolizada como $(\neg p)$, onde $p : (2+2=4)$.

g) 0 e 2 são pares.

Pode ser simbolizada como $(p \wedge q)$, onde p : (0 é par) e q : (2 é par).

h) Kurt Gödel e Hao Wang são amigos.

Pode ser simbolizada como p, onde p : (Kurt Gödel e Hao Wang são amigos).

i) 1 está entre 0 e 2.

Pode ser simbolizada como p, onde p : (1 está entre 0 e 2).

j) 1 é maior que 0 e 2 também.

Pode ser simbolizada como $(p \wedge q)$, onde p : (1 é maior que 0) e q : (2 é maior que 0).

l) Todos os números naturais são reais.

Pode ser simbolizada como p, onde p : (todos os números naturais são reais).

m) Os números 2, 3 e 5 são primos.

Pode ser simbolizada como $((p \wedge q) \wedge r)$, onde p : (o número 2 é primo), q : (o número 3 é primo) e r : (o número 5 é primo).

n) Os números 2, 3 e 5 são primos entre si.

Pode ser simbolizada como p, onde p : (os números 2, 3 e 5 são primos entre si).

o) Ao menos um dos números 1, 2 e 3 é primo.

Pode ser simbolizada como $((p \vee q) \vee r)$, onde p : (1 é primo), q : (2 é primo) e r : (3 é primo).

p) Exatamente um dos números 1, 2 e 4 é primo.

Pode ser simbolizada como $((((p \wedge q) \vee r) \wedge (p \to (\neg q \wedge \neg r))) \wedge (q \to (\neg p \wedge \neg r))) \wedge (r \to (\neg p \wedge \neg q))$, onde p : (1 é primo), q : (2 é primo) e r : (4 é primo).

A sentença acima também poderia ser simbolizada como uma disjunção:

$((p \wedge (\neg q \wedge \neg r)) \vee (q \wedge (\neg p \wedge \neg r))) \vee (r \wedge (\neg p \wedge \neg q))$

3 Semântica

3.1 Função de Verdade

Segundo a definição, uma sentença é verdadeira ou falsa, de maneira exclusiva, em um dado contexto. Vamos agora estudar um processo de avaliação das sentenças, ou seja, uma maneira de dada uma sentença α, determinar se α é verdadeira ou falsa em um dado contexto. Nosso objetivo é determinar se α é verdadeira em todos os contextos, ou não.

Definição Os *valores de verdade* são o V (*verdadeiro*) e o F (*falso*). Uma sentença é *verdadeira* se seu valor de verdade é V ou é *falsa* se seu valor de verdade é F.

Da definição de sentença decorre que uma sentença possui um único valor de verdade em um dado contexto. A avaliação de uma sentença é a determinação deste valor de verdade.

Senteças atômicas

Com relação a avaliação de sentenças atômicas, assumimos o seguinte:

1. Como as sentenças atômicas são as unidades básicas a partir das quais todas as outras sentenças são formadas, consideramos não existir nenhum vínculo entre os valores de verdade das sentenças atômicas. Assim, quando sentenças atômicas são listadas, não levamos em conta nenhum vínculo entre seus valores de verdade.

Exemplo 1 Dadas as sentenças atômicas (chove lá fora) e (o chão está molhado), não levamos em conta os possíveis vínculos que venham a existir entre seus valores de verdade. Por exemplo, a segunda ser uma conseqüência da primeira.

2. O valor de verdade de uma sentença atômica depende exclusivamente do contexto ao qual a sentença está associada.

Exemplo 2 Somente pessoas que possuem algum conhecimento sobre a história da lógica sabem que a sentença atômica (Gerhard Gentzen provou a consistência da aritmética) é verdadeira.

O exemplo acima nos mostra que só podemos avaliar uma sentença atômica se conhecemos o contexto ao qual ela está associada.

Sentenças moleculares

Com relação a avaliação de sentenças moleculares, várias coisas podem acontecer.

1. O valor de verdade de uma sentença molecular pode depender ou não do valor de verdade das suas componentes.

Exemplo 3

a) Considere a conjunção ((2 é par) $\wedge$ (3 é ímpar)). Esta é uma sentença verdadeira, pois afirma que duas coisas que realmente acontecem, acontecem. De fato, a conjunção afirma que cada uma das componentes (2 é par) e (3 é ímpar) é verdadeira e estas realmente são sentenças verdadeiras. Assim, a conjunção é verdadeira.

b) Por outro lado, a conjunção ((2 é par) $\wedge$ (3 é par)) é falsa, pois afirma que duas coisas acontecem e uma delas, na verdade, não acontece. De fato, a conjunção afirma que cada uma das componentes (2 é par) e (3 é par) é verdadeira mas a segunda componente, na verdade, é uma sentença falsa. Assim, a conjunção é falsa.

O exemplo acima mostra que o valor de verdade de uma conjunção pode depender do valor de verdade das sua componentes, sendo verdadeira ou falsa, segundo estes valores.

Exemplo 4 Considere agora a disjunção ((amanha vai chover) $\vee$ (amanhã não vai chover). No caso desta sentença, uma situação diferente da do Exemplo 3 acontece. De fato, a disjunção é verdadeira pois afirma que duas alternativas, das quais uma sempre acontece, é verdadeira. Agora, exatamente porque das alternativas oferecidas uma das duas sempre acontece, em qualquer contexto que enunciasse-mos esta disjunção, teríamos:

i. Caso amanhã chova, a sentença é verdadeira, pois sua primeira componente é verdadeira.

ii. Caso amanhã não chova, a sentença é verdadeira, pois sua segunda componente é verdadeira.

Assim, a disjunção é verdadeira e verdadeira em qualquer contexto em que for enunciada. Ou seja, seu valor de verdade não depende do valor de verdade das suas componenetes, pois este é pré fixado, a saber, verdadeiro em todos os contextos.

O exemplo acima mostra que, em alguns casos, o valor de verdade de uma sentença molecular pode não depender do valor de verdade de suas componentes e ser pré fixado para qualquer contexto. (Como já dissemos anteriormente estamos particularmente interessados em caracterizar as sentenças que possuem esta propriedade, devido ao papel importante que desempenham na prova de teoremas.)

O que devemos examinar agora é como funciona a dependência entre os valores de verdade de uma sentença composta e o valor de verdade das suas componentes.

2. Existem casos em que o valor de verdade de uma sentença molecular pode ser determinado exclusivamente a partir dos valores de verdade das suas sentenças componentes.

Exemplo 5 Considere as sentenças atômicas (2 é par) e (3 é par). Sabemos que estas sentenças são verdadeira e falsa, respectivamente.

Considere agora as sentenças moleculares $((2 \text{ é par}) \wedge (3 \text{ é par}))$ e $((2 \text{ é par}) \vee (3 \text{ é par}))$, obtidas por aplicações dos conectivos às sentenças dadas. Quanto ao valor de verdade destas sentenças moleculares, temos o seguinte:

i. A conjunção é falsa, pois afirma que duas coisas devem acontecer e é dado que uma delas não acontece.

ii. A disjunção é verdadeira, pois oferece duas alternativas das quais sabemos que acontece.

3. Existem casos em que o valor de verdade de uma sentença molecular não pode ser determinado exclusivamente a partir dos valores de verdade das sentenças componentes, mas depende de *alguma coisa a mais*, por exemplo, a ordem em que os fatos narrados pelas suas componentes realmente aconteceram, além destes valores.

Exemplo 6 Considere as sentenças atômicas $(\text{Tarzan tirou a roupa})$ e $(\text{Tarzan caiu no rio})$, as quais admitimos serem ambas verdadeiras.

Considere agora as sentenças moleculares $((\text{Tarzan tirou a roupa}) \wedge (\text{Tarzan caiu no rio}))$ e $((\text{Tarzan caiu no rio}) \wedge (\text{Tarzan tirou a roupa}))$, obtidas por aplicações do conectivo e às sentenças dadas. Quanto ao valor de verdade destas sentenças moleculares, temos o seguinte:

i. Uma das duas conjunções deve ser vardadeira, pois admitimos que ambas as componentes são verdadeiras.

ii. Não sabemos dizer qual das duas é verdadeira, pois não sabemos em que ordem os fatos registrados nas sentenças atômicas ocorreram.

Temos então a importante definição:

Definição Um conectivo é *por função de verdade* se o valor de verdade das sentenças moleculares obtidas por seu intermédio é determinado única e exclusivamente a partir dos valores de verdade das sentenças componentes.

Com relação a avaliação de sentenças moleculares, adotaremos o seguinte:

Os conectivos não e, ou, se...então e se, e somente se são por função de verdade.

3.2 Regras de avaliação e tabelas de verdade dos conectivos

As regras de avaliação descrevem como podemos determinar o valor de verdade de uma sentença molecular, dados os valores de verdade das suas componentes. Estas regras são definidas em conformidade com o uso que se faz dos conectivos não e, ou, se...então e se, e somente se, na Linguagem Matemática.

Negação

Na Linguagem Matemática, o não é utilizado quando queremos negar o conteúdo de uma sentença.

Exemplo 1 Por exemplo, na Teoria dos Conjuntos usamos o não quando definimos a complementação de conjuntos. Esta é a operação que associa a cada subconjunto A, de um dado universo U, um outro conjunto $\overline{A}$, chamado o *complemento* de A, formado pelos elementos de U que não pertencem a A. Dado $u \in U$, a condição para que u esteja em $\overline{A}$ é que u não esteja em A e a condição para que u esteja em A é que u não esteja em $\overline{A}$. Em outras palavras,

$$u \in \overline{A} \text{ é verdadeira se, e somente se, } u \in A \text{ é falsa.}$$

Temos, então, a seguinte regra de avaliação para negações:

Regra 1 Uma negação é verdadeira se a sentença negada é falsa. E é falsa se a sentença negada é verdadeira.

Assim, para uma sentença qualquer α, temos:

$$\neg\alpha \text{ é verdadeira se } \alpha \text{ é falsa}$$

$$\neg\alpha \text{ é falsa se } \alpha \text{ é verdadeira}$$

Esta regra pode ser sumarizada na seguinte tabela, chamada a *tabela de verdade do* não:

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

Conjunção

Na Linguagem Matemática, o `e` é utilizado quando queremos afirmar a ocorrência simultânea de dois fatos.

Exemplo 2 Por exemplo, na Teoria dos Conjuntos, usamos o `e` quando definimos a interseção de conjuntos. Esta é a operação que associa a dois subconjuntos A e B, de um dado universo U, um outro subconjunto $A \cap B$, chamado a *interseção* de A com B, formado pelos elementos de U que estão simultaneamente em A e em B. Dado $u \in U$, a condição para que u esteja em $A \cap B$ é que u esteja em A `e` u esteja em B. Com isto, queremos dizer que u deve estar em A e, ao mesmo tempo, em B. Assim, a condição para que u não esteja em $A \cap B$ é que u não esteja em ao menos um dos conjuntos A ou B. Em outras palavras,

$u \in A \cap B$ é verdadeira
se, e somente se,
$u \in A$ e $u \in B$ são simultaneamente verdadeiras.

Temos, então, a seguinte regra de avaliação para conjunções:

Regra 2 Uma conjunção é verdadeira se suas componentes são simultaneamente verdadeiras. E é falsa quando ao menos uma das suas componentes é falsa.

Assim, dadas duas sentenças quaisquer α e β, temos:

$$(\alpha \wedge \beta) \textit{ é verdadeira se } \alpha \textit{ e } \beta \textit{ são verdadeiras}$$

$$(\alpha \wedge \beta) \textit{ é } false \textit{ se } \alpha \textit{ é } falsa \textit{ e} \beta \textit{ é verdadeira}$$

$$(\alpha \wedge \beta) \textit{ é } falsa \textit{ se } \alpha \textit{ é verdadeira e } \beta \textit{ é } falsa$$

$$(\alpha \wedge \beta) \textit{ é verdadeira se } \alpha \textit{ e } \beta \textit{ são } falsas$$

Esta regra pode ser sumarizada na seguinte tabela, chamada a *tabela de verdade do* `e`:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

Na Linguagem Matemática, o `ou` é utilizado quando queremos apresentar alternativas. Mas isto é feito de uma maneira muito particular.

Exemplo 3 Por exemplo, na Teoria dos Conjuntos, usamos o `ou` quando definimos a união de conjuntos. Esta é a operação que associa a dois subconjuntos A e B, de um dado universo U, um outro subconjunto $A \cup B$, chamado a *união* de A e B, formado pelos elementos de U que estão apenas em A, os que estão apenas em B e os que estão simultaneamente em A e em B. Dado $u \in U$, a condição para que u esteja em $A \cup B$ é que u esteja em A `ou` u esteja em B.

Com isto, queremos dizer que u pode estar só em A, pode estar só em B ou, ainda, pode estar em ambos A e B. Assim, a condição para que u não esteja em $A \cup B$ é que u não esteja em nenhum dos conjuntos A e B. Em outras palavras,

$u \in A \cap B$ *é falsa*
se, e somente se,
$u \in A$ *e* $u \in B$ *são simultaneamente falsas.*

Temos, então, a seguinte regra de avaliação para disjunções:

Regra 3 Uma disjunção é falsa se suas componentes são simultaneamente falsas. E é verdadeira quando ao menos uma das suas componentes é verdadeira.

Assim, dadas duas sentenças quaisquer α e β, temos:

$(\alpha \vee \beta)$ *é verdadeira se* α *e* β *são verdadeiras*

$(\alpha \vee \beta)$ *é verdadeira se* α *é verdadeira e* β *é falsa*

$(\alpha \vee \beta)$ *é verdadeira se* α *é falsa e* β *é verdadeira*

$(\alpha \vee \beta)$ *é falsa se* α *e* β *são falsas*

Esta regra pode ser sumarizada na seguinte tabela, chamada a *tabela de verdade do* ou:

α	β	$\alpha \vee \beta$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esta maneira peculiar de usar o ou não é própria da Linguagem Matemática, mas também é freqüente na Língua Portuguesa.

EXEMPLO 4 Usualmente, quando dizemos amanhã o tempo vai ficar nublado ou vai chover, não estamos excluíndo a possibilidade de ambas as coisas acontecerem ao mesmo tempo.

Este é o uso do ou no *sentido não exclusivo*. Mas também existe uma outra maneira de usar o ou que talvez seja ainda mais freqüente na Língua Portuguesa que o uso do ou no sentido não exclusivo.

EXEMPLO 5 Usualmente, quando dizemos Marcelo vai de carro ou de ônibus, estamos querendo dizer que uma das duas coisas acontece, mas não é o caso que ambas aconteçam ao mesmo tempo.

Este é o uso do ou no *sentido exclusivo*. Embora na língua portuguesa o uso do ou no sentido exclusivo seja mais frequente, por uma questão de tradição, na Linguagem Matemática o ou é utilizado mais comumente no sentido inclusivo.

Na Linguagem Matmática o ou é utilizado nos dois sentidos. Por exemplo, 0 é par ou ímpar e 2 é natural ou real.

Biimplicação

Na Linguagem Matemática, o se, e somente se é utilizado quando queremos dizer que duas sentenças têm o mesmo conteúdo.

Exemplo 5 Por exemplo, considere a seguinte definição da Geometria Euclideana Plana:

Definição Duas retas são paralelas *se, e somente se,* não coincidem e não possuem pontos em comum.

Na definição acima estamos identificando os conteúdos das sentenças duas retas são paralelas e duas retas não coincidem e não possuem pontos em comum.

O exemplo acima nos leva a considerar que para a avaliação de biimplicações deveríamos utilizar um critério como o seguinte:

> *Uma biimplicação é verdadeira se suas componentes possuem o mesmo conteúdo e é falsa quando suas componentes possuem conteúdos distintos.*

Mas, como estamos considerando que o conectivo se, e somente se é por função de verdade, a única informação que poder ser utilizada quanto ao conteúdo das sentenças componentes, na avaliação de sentenças moleculares formadas por seu intermédio, são os valores de verdade destas sentenças. Assim, temos a seguinte regra de avaliação para biimplicações:

Regra 4 Uma biimplicação é verdadeira se suas componentes possuem os mesmos valores de verdade e é falsa quando suas componentes possuem valores de verdade distintos.

Assim, dadas duas sentenças quaisquer α e β, temos:

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ } \textit{é verdadeira se } \alpha \textit{ e } \beta \textit{ são verdadeiras}$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ } \textit{é falsa se } \alpha \textit{ é verdadeira e } \beta \textit{ é falsa}$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ } \textit{é falsa se } \alpha \textit{ é falsa e } \beta \textit{ é verdadeira}$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ } \textit{é verdadeira se } \alpha \textit{ e } \beta \textit{ são falsas}$$

Esta regra pode ser sumarizada na seguinte tabela, chamada a *tabela de verdade do* se, e somente se:

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Implicação

De uma maneira geral, o se...então não é por função de verdade.

Exemplo 4 Considere as sentenças Paulo ficou doente e o médico deu um remédio para Paulo, que consideramos verdadeiras.

a) Se Paulo ficou doente, então o médico receita o remédio para Paulo.

Se a sentença acima for verdadeira, o médico apenas cumpriu sua obrigação.

b) Se o médico receita o remédio para Paulo, então Paulo fica doente.

Se a sentença acima for verdadeira, temos dois casos:

i. Se Paulo ficou doente porque tomou o remédio, o médico é um charlatão.

ii. Se Paulo ficou doente por qualquer outro motivo, mas não porque tomou o remédio, não podemos culpar o médico.

Usualmente o valor de verdade de uma implicação depende da existência de alguma relação de *causa* e *efeito* entre a antecedente e a conseqüente. Assim, usualmente, o se...então não é por função de verdade.

Como considerar o se...então por função de verdade?

α	β	$\alpha \to \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	?
F	F	?

Teremos quatro casos:

	α	β	$\alpha \to \beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \to \beta$
1.	V	V	V	V	V	V
2.	V	F	F	V	V	V
3.	F	V	F	F	V	V
4.	F	F	F	V	F	V

1. Neste caso, a tabela de verdade do $\to$ seria mesma que a do $\wedge$.
2. Neste caso, a tabela de verdade do $\to$ seria mesma que a do $\leftrightarrow$.
3. Neste caso, a tabela de verdade do $\to$ seria mesma que a do α.
4. Neste caso, a tabela de verdade do $\to$ não contradiria nenhuma tabela conhecida.

Regra 4 Uma implicação é falsa se sua antecedente é verdadeira e sua conseqüente é falsa. E é verdadeira em todos os outros casos.

Assim, dadas duas sentenças quaisquer α e β, temos:

$$(\alpha \to \beta) \text{ é verdadeira se } \alpha \text{ e } \beta \text{ são verdadeiras}$$

$$(\alpha \to \beta) \text{ é verdadeira se } \alpha \text{ é falsa e } \beta \text{ é verdadeira}$$

$$(\alpha \to \beta) \text{ é falsa se } \alpha \text{ é verdadeira e } \beta \text{ é falsa}$$

$$(\alpha \to \beta) \text{ é verdadeira se } \alpha \text{ e } \beta \text{ são falsas}$$

Esta regra pode ser sumarizada na segunte tabela, chamada a *tabela de verdade do* se...então:

α	β	$\alpha \to \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Alguns exemplos do uso das tabelas de verdade na avaliação de sentenças moleculares são:

Exemplo Dadas as sentenças 0 é par, e 1 é par que são V e F, respectivamente, temos:

a) 0 não é par é F.

b) 1 não é par é V.

Exemplo Dadas as sentenças 0 é par, 1 é par e 2 é par, que são V, F e V, respectivamente, temos:

a) 0 é par e 2 é par é V.

b) 0 é par e 1 é par é F.

c) 1 é par e 2 é par é F.

d) 1 é par e 3 é par é F.

Exemplo Dadas as sentenças 1 é par, 2 é par, 2 é primo e 3 é par, que são F, V, V e F, respectivamente, temos:

a) 2 é par ou 2 é primo é V.

b) 2 é par ou 1 é par é V.

c) 1 é par ou 2 é primo é V.

d) 1 é par ou 3 é par é F.

Observe que uma disjunção assume o valor V quando suas componentes assumem ambas o valor V. Por esta razão, em Lógica Matemática, o ou é dito ser usado no *sentido inclusivo*.

Exemplo Dadas as sentenças 0 é par, 1 é par, 2 é par e 3 é par, que são V, F, V e F, respectivamente, temos:

a) Se 0 é par, então 2 é par é V.

b) Se 0 é par, então 1 é par é F.

c) Se 1 é par, então 0 é par é V.

d) Se 1 é par, então 3 é par é V.

Exemplo Dadas as sentenças 0 é par, 1 é par e 2 é par, que são V, F e V, respectivamente, temos:

a) 0 é par se, e somente se, 2 é par é V.

b) 0 é par se, e somente se, 1 é par é F.

c) 1 é par se, e somente se, 2 é par é F.

d) 1 é par se, e somente se, 3 é par é V.

3.3 Interpretações

O valor de verdade de uma sentença molecular pode depender ou não do contexto associado. Ou seja, existem sentenças que são sempre verdadeiras, independente do contexto. Sentenças que são às vezes verdadeiras, às vezes falsas, dependendo do contexto. E sentenças que são sempre falsas, independente do contexto. Veremos agora que, para o caso das sentenças formadas pelo uso dos conectivos não, e, ou, se...então e se, somente se (que possuem tabelas de verdade), dada uma sentença qualquer, podemos decidir em qual dos casos ela está inserida.

EXEMPLO Considere as seguintes sentenças:

a) Chove ou não chove.

b) Brasília é a capital do Brasil e São Paulo é a maior cidade da América Latina.

c) Faz sol e não faz sol.

Avaliando estas sentenças, concluímos que (a) é verdadeira e sempre verdadeira, independente do contexto; (b) é verdadeira, mas poderia ser falsa, dependendo do contexto; (c) é falsa e sempre falsa, independente do contexto.

Simbolizando, temos (a) $(p \vee (\neg p))$, (b) $(q \wedge r)$ e (c) $(s \wedge (\neg s))$, onde p : (chove), q : (Brasília é a capital do Brasil), r : (São Paulo é a maior cidade da América Latina) e s : (faz sol).

Vamos, agora, avaliar estas sentenças utilizando as tabelas de verdade.

a) A sentença $(p \vee (\neg p))$ é formada por aplicação do conectivo $\neg$ à sentença atômica p, obtendo $(\neg p)$ e por aplicação do conectivo $\vee$ às sentenças p e $(\neg p)$. De acordo com a tabela de verdade do $\vee$, o valor de verdade de $(p \vee (\neg p))$ pode ser determinado diretamente a partir dos valores de p e $(\neg p)$. De modo análogo, de acordo com a tabela de verdade do $\neg$, o valor de verdade de $(\neg p)$ também pode ser determinado diretamente a partir do valor de verdade de p. Assim, dado o valor de p, podemos calcular de maneira direta o valor de $(p \vee (\neg p))$, calculando o valor de $(\neg p)$ pela tabela do $\neg$ e calculando o valor de $(p \vee (\neg p))$, usando a tabela do $\vee$. Mas como p é atômica, o valor de p não pode ser calculado a partir do valor de nenhuma outra sentença. De acordo com a definição de sentença, teremos, então, dois casos:

1. Se p possui valor V, $(\neg p)$ possui valor F e $(p \vee (\neg p))$ possui valor V.

2. Se p possui valor F, $(\neg p)$ possui valor V e $(p \vee (\neg p))$ possui valor V.

Como, em ambos os casos, $(p \vee (\neg p))$ possui valor V e estes são os únicos casos possíveis, concluímos que $(p \vee (\neg p))$ é uma verdade lógica, pois sempre assume valor V.

O que foi dito acima pode ser sumarizado na seguinte tabela, chamada a *tabela de verdade de* $(p \vee (\neg p))$:

p	$(\neg p)$	$(p \vee (\neg p))$
V	F	V
F	V	V

b) A sentença $(q \wedge r)$ é formada por aplicação do conectivo $\wedge$ às sentenças atômicas q e r. De acordo com a tabela de verdade do $\wedge$, o valor de verdade de $(q \wedge r)$ pode ser determinado diretamente a partir dos valores de q e r. Como q e r são atômicas, os valores de q e r não podem ser calculados a partir do valor de nenhuma outra sentença. De acordo com a definição de sentença teremos, então, quatro casos:

1. Se q e r possuem ambas o valor V, $(q \wedge r)$ possui valor V.

2. Se q possui valor V e r possui valor F, $(q \wedge r)$ possui valor F.

3. Se q possui valor F e r possui valor V, $(q \wedge r)$ possui valor F.

4. Se q e r possuem ambos valor F, $(q \wedge r)$ possui valor F.

Os dois primeiros casos acima são suficientes para concluirmos que $(q \wedge r)$ não é uma verdade lógica, pois pode assumir tanto o valor V como o valor F.

O que foi dito acima pode ser sumarizado na seguinte tabela, chamada a *tabela de verdade de* $(q \wedge r)$:

q	r	$(q \wedge r)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

c) A sentença $(s \wedge (\neg s))$ é formada por aplicação do conectivo $\neg$ à sentença atômica s, obtendo $(\neg s)$ e por aplicação do conectivo $\wedge$ às sentenças s e $(\neg s)$. De acordo com a tabela de verdade do $\wedge$, o valor de verdade de $(s \wedge (\neg s))$ pode ser determinado diretamente a partir dos valores de s e $(\neg s)$. Analogamente, de acordo com a tabela de verdade do $\neg$, o valor de verdade de $(\neg s)$ também pode ser determinado diretamente a partir do valor de verdade de s. Assim, dado o valor de s, podemos calcular de maneira direta o valor de $(s \wedge (\neg s))$. Como s é atômica, o valor de s não pode ser calculado a partir do valor de nenhuma outra sentença. De acordo com a definição de sentença, teremos, então dois casos:

1. Se s possui valor V, $(\neg s)$ possui valor F e $(s \wedge (\neg s))$ possui valor F.

2. Se s possui valor F, $(\neg s)$ possui valor V e $(s \wedge (\neg s))$ possui valor F.

Como em ambos os casos $(s \wedge (\neg s))$ possui valor F e estes são os únicos casos possíveis, concluímos que $(s \wedge (\neg s))$ sempre possui valor F.

O que foi dito acima pode ser sumarizado na seguinte tabela, chamada a *tabela de verdade de* $(s \wedge (\neg s))$:

s	$(\neg s)$	$(s \wedge (\neg s))$
V	F	F
F	V	F

O Exemplo 21 mostra como podemos associar a sentenças simbolizadas uma tabela de verdade que lista todos os valores de verdade possíveis que esta sentença simbolizada pode assumir. Em particular, inspecionando a tabela de uma sentença podemos determinar se esta sentença é ou não uma verdade lógica.

Apresentaremos agora algumas definições que nos permitirão estender o processo esboçado acima para todas as sentenças simbolizadas.

Definição Uma *interpretação* para uma sentença simbolizada α é uma atribuição de valores de verdade às letras sentenciais que ocorrem em α, de modo que a cada letra seja atribuído um único valor.

EXEMPLO

a) A sentença simbolizada p é atômica e, portanto, possui apenas duas interpretações:

p
V
F

b) A sentença simbolizada $(p \to (q \to p))$ possui ocorrência duas sentenças atômicas p e q. Portanto, possui quatro interpretações:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

c) A sentença simbolizada $(((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r))$ possui ocorrência das três sentenças atômicas p, q e r. Logo, possui oito interpretações:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

De uma maneira geral, temos o seguinte resultado:

Proposição *Se α é uma sentença simbolizada que possui a ocorrência de m letras sentenciais distintas, então α possui exatamente 2^m interpretações.*

Prova:

Seja α uma sentença simbolizada que possui a ocorrência de m letras sentenciais distintas.

De acordo com a definição, cada interpretação para α pode ser visualizada como uma linha de uma tabela:

p_1	p_2	$\ldots$	p_m
		$\ldots$	

onde em cada uma das lacunas ocorre uma das letras V ou F.

Decorre daí que o número de interpretações distintas para α será exatamente o número total de maneiras de preencher a tabela acima, associando a cada letra sentencial exatamente um dos valores V ou F.

Como para cada uma das lacunas temos duas possibilidades e o preenchimento de cada lacuna é independente do preenchimento das outras, pelo Princípio Fundamental da Contagem (da Análise Combinatória), o número total de possibilidades é $\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{m \text{ vezes}} = 2^m$. ■

(Redução do Número de Parênteses

Para facilitar a escrita de sentenças simbolizadas, daqui por diante adotaremos as seguintes regras.

Regra 1 Os parênteses externos não serão escritos.

Exemplo 1
Ao invés de $((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$, escreveremos simplesmente $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$.

Regra 2 Os parênteses em torno da negação não serão escritos.

Exemplo 2
Ao invés de $((\neg q) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg p)$, escreveremos simplesmente $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$.

Regra 3 O $\rightarrow$ e o $\leftrightarrow$ têm precedência sobre o $\wedge$ e o $\vee$.

Exemplo 3
Ao invés de $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$, escreveremos simplesmente $\neg q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$.

Regra 4 O $\neg$ se aplica à menor sentença que o sucede.

Exemplo 4
Escreveremos $\neg(p \wedge q)$, pois escrevendo $\neg p \wedge q$ o $\neg$ se aplica somente à sentença p.)

4 Tautologias, contingências e contradições

Podemos, agora, classificar as sentenças simbolizadas, de acordo com suas tabelas de verdade.

Algumas sentenças são verdadeiras em todas as suas interpretações.

Definição Uma sentença simbolizada α é uma *tautologia* se é V em todas as suas interpretações.

Escrevemos $\models \alpha$, ao invés de "α é uma tautologia".

As tautologias são exatamente as verdades lógicas que podem ser formadas utilizando-se somente os conectivos não, e, ou, se...então e se, e somente se (que possuem tabelas de verdade).

Exemplo São exemplos de tautologias: (a) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$, (b) $\neg q \rightarrow (p \rightarrow q)$, e (c) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow q)$.

Assim, α é uma tautologia se, na última coluna de sua tabela de verdade, ocorre somente o valor V.

Algumas sentenças são verdadeiras em algumas de suas interpretações e falsas em outras.

Definição Uma sentença simbolizada α é uma *contingência* se é V em algumas das suas interpretações e F em outras.

Exemplo São exemplos de contingências: (a) $q \wedge (p \to q) \to p$, (b) $\neg p \wedge (p \to q) \to \neg q$ e (c) $(p \wedge q \to r) \to (p \to r) \wedge (q \to r)$.

Assim, α é uma contingência se, na última coluna de sua tabela de verdade ocorre tanto o valor V quanto o valor F.

Algumas sentenças são falsas em todas as suas interpretações.

Definição Uma sentença simbolizada α é uma *contradição* se é F em todas as suas interpretações.

Exemplo São exemplos de contradições: (a) $p \wedge q \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$, (b) $p \vee q \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ e (c) $\neg(p \to q) \leftrightarrow \neg p \vee q$.

Assim, α é uma contradição se, na última coluna de sua tabela de verdade, ocorre somente o valor F.

Temos, então, o conjunto das sentenças simbolizadas particionado em três subconjuntos disjuntos: o conjunto das tautologias, o das contingências e o das contradições.

Principais exemplos de tautologias

Apresentamos a seguir os principais exemplos de tautologias. O leitor deve se familiarizar com estas sentenças, construindo suas tabelas de verdade.

a) $p \wedge (p \to q) \to q$

b) $\neg q \wedge (p \to q) \to \neg p$

c) $\neg p \wedge (p \vee q) \to q$

d) $p \wedge q \to p$

e) $p \to p \vee q$

f) $p \to (q \to p \wedge q)$

g) $(p \to q) \wedge (p \to r) \to (p \to q \wedge r)$

h) $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

i) $(p \to q) \wedge (\neg p \to q) \to q$

j) $(p \vee q \to r) \leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$

l) $(p \to q \wedge \neg q) \to \neg p$

m) $p \wedge \neg p \to q$

n) $p \vee \neg p$

o) $\neg(p \vee \neg p)$

5 Equivalência tautológica

No Exemplo 15, uma mesma sentença foi simbolizada de duas maneiras distintas. Vejamos um outro exemplo.

Exemplo A sentença caso João a convide, caso Ricardo a convide, Célia vai ao cinema pode ser simbolizada como $p \vee q \to r$, onde p : (João convida Célia), q : (Ricardo convida Célia) e r : (Célia vai ao cinema).

Mas, levando em conta que a sentença quer dizer que se Célia não foi ao cimema, nem João nem Ricardo a convidou, temos outra simbolização: $\neg r \to \neg p \wedge \neg q$.

Surge, então, a questão de decidir se duas simbolizações distintas expressam o mesmo conteúdo. Esta questão pode ser resolvida com uso das tabelas de verdade, mediante os conceitos a seguir.

Definição Uma *interpretação* para duas sentenças simbolizadas α e β é uma atribuição de valores as letras sentenciais que ocorrem em α e β.

Exemplo As sentenças simbolizadas $p \vee q \to r$ e $\neg r \vee \neg p \wedge \neg q$ possuem ocorrências das sentenças atômicas p, q e r. Logo, possuem oito interpretações.

Definição Duas sentenças simbolizadas α e β são *tautologicamente equivalentes* se, em cada interpretação para α e β, os valores de α e β são iguais.

Escreveremos: $\alpha \models\!\!\!\dashv \beta$ no lugar de "α e β são tautologicamente equivalentes".

Exemplo

a) $p \vee q \to r \models\!\!\!\dashv \neg r \to \neg p \wedge \neg q$

b) $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \models\!\!\!\dashv (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

c) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \models\!\!\!\dashv \neg(p \leftrightarrow q)$

A proposição a seguir relaciona os conceitos de tautologia e equivalêcia tautológica.

Proposição 5.0.1 *Se α e β são sentenças simbolizadas, então as seguintes condições são equivalentes:*

a) $\alpha \models\!\!\!\dashv \beta$

b) $\models \alpha \leftrightarrow \beta$

Prova:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\alpha \models\!\!\!\dashv \beta$.

Daí, em cada interpretação para α e β, as sentenças α e β assumem o mesmo valor de verdade.

Construindo a tabela de $\alpha \leftrightarrow \beta$, teremos então que, em cada linha, α e β assumem valores iguais.

Assim, $\alpha \leftrightarrow \beta$ assumirá o valor V em todas as linhas, ou seja, $\models \alpha \leftrightarrow \beta$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\models \alpha \leftrightarrow \beta$.

Daí, em cada linha da tabela de verdade de $\alpha \leftrightarrow \beta$ ocorre a letra V.

Assim, em cada linha, os valores de α e β são iguais.

Como cada linha da tabela inicia com uma interpretação para α e β, as sentenças α e β assumem o mesmo valor de verdade em cada interpretação, ou seja, $\alpha \models\!\!\!\dashv \beta$. ∎

Principais equivalências tautológicas

Apresentamos a seguir os principais exemplos de equivalências tautológicas. Para se familiarizar com cada um deles, o leitor deve, para cada item, aplicar a proposição acima e construir a tabela de verdade que verifica a equivalência.

a) $\neg\neg p \models\!\!\!\!\!=\! p$

b) $p \wedge q \models\!\!\!\!\!=\! q \wedge p$

c) $p \vee q \models\!\!\!\!\!=\! q \vee p$

d) $(p \wedge q) \wedge r \models\!\!\!\!\!=\! p \wedge (q \wedge r)$

e) $(p \vee q) \vee r \models\!\!\!\!\!=\! p \vee (q \vee r)$

f) $(p \wedge q) \vee r \models\!\!\!\!\!=\! (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

g) $(p \vee q) \wedge r \models\!\!\!\!\!=\! (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

h) $\neg(p \wedge q) \models\!\!\!\!\!=\! \neg p \vee \neg q$

i) $\neg(p \vee q) \models\!\!\!\!\!=\! \neg p \wedge \neg q$

j) $p \wedge p \models\!\!\!\!\!=\! p$

l) $p \vee p \models\!\!\!\!\!=\! p$

m) $p \vee (p \wedge q) \models\!\!\!\!\!=\! p$

n) $p \wedge (p \vee q) \models\!\!\!\!\!=\! p$

6 Validade

6.1 Passos Lógicos

Nossa motivação para a introdução dos conceitos anteriores foi a determinação da verdade lógica de sentenças. O problema da determinação da verdade lógica foi levantado a partir de um certo aspecto das provas, exemplificado na prova do teorema apresentado no parágrafo 1.

Faremos agora uma outra análise da prova ali apresentada para motivar outra questão fundamental nos estudos de Lógica Matemática.

Outro aspecto das provas, exemplificado no teorema que aparece na motivação, é o uso de certos *passos lógicos* como garantia para a correção da prova. A prova apresentada consiste essencialmente em tomar um número inteiro positivo qualquer n, maior que 1, e efetuar o seguinte raciocínio:

> n é primo ou n não é primo.
>
> No primeiro caso, concluímos trivialmente que n possui um fator primo.
>
> No segundo, fornecemos uma explicação pormenorizada de como encontrar, após sucessivas fatorações, um fator primo de n.

Ou seja, a idéia central da prova pode ser assim sumarizada:

$$\begin{array}{l}
(n \text{ é primo}) \vee \neg(n \text{ é primo}) \\
(n \text{ é primo}) \to (n \text{ possui um fator primo}) \\
\neg(n \text{ é primo}) \to (n \text{ possui um fator primo}) \\
\text{Logo, } (n \text{ possui um fator primo})
\end{array}$$

Simbolizando, temos a seguinte seqüência de sentenças:

$$\begin{array}{l}
p \vee \neg p \\
p \to q \\
\neg p \to q \\
\text{Logo, } q
\end{array}$$

onde p : (n é primo) e q : (n possui um fator primo).

Esta seqüência de sentenças simboliza a idéia de que, se temos duas alternativas e cada uma delas nos leva à conclusão que estamos buscando, então podemos garantir que a conclusão deve ser verdadeira. Como a prova mostra, as três primeiras sentenças são verdadeiras. Assim, utilizando o esquema acima podemos efetuar um passo lógico e concluir que a última sentença também é verdadeira, ou seja, que p possui um fator primo.

Em oposição ao que foi dito acima, observe que nenhuma prova correta poderia ser baseada em um passo lógico como:

$$p \to r$$
$$q \to r$$
$$\text{Logo, } r$$

pois, mesmo garantindo que as premissas são verdadeiras, não podemos garantir que a conclusão seja verdadeira. De fato, se p, q e r fossem todas sentenças falsas, teríamos: $p \to r$ é V, $q \to r$ é V, mas r é F. Ou seja, esse não é um passo lógico correto.

Em resumo, queremos destacar os seguintes fatos:

1. Podemos usar seqüências de sentenças para expressar certos passos lógicos.

2. Passos lógicos corretos são freqüentemente utilizados na prova de teoremas.

3. Passos lógicos que não são corretos não devem ser utilizados na prova de teoremas.

Assim, nosso passo seguinte no estudo de Lógica Matemática será aprender a reconhecer seqüências de sentenças que podem ser usados para expressar passos lógicos corretos.

6.2 Validade de Argumentos

Seqüências de sentenças nas quais uma é considerada como conclusão das outras recebem uma denominação especial.

Definição Um *argumento* é uma seqüência finita de sentenças, em que uma é considerada como *conclusão* e as demais são chamadas *premissas*. As premissas de um argumento são consideradas como *justificativas* para a conclusão.

Exemplo 1 São exemplos de argumentos:

a) Sócrates é homem.
Todos os homens são mortais.
Logo, Sócrates é mortal.

b) Vovó se chama Ana.
Vovô se chama Lúcio.
Conseqüentemente, eu me chamo Ana Lúcia.

c) Há exatamente 136 caixas de laranja no depósito.
Cada caixa contém pelo menos 140 laranjas.

Nenhuma caixa contém mais do que 166 laranjas.
Deste modo, no depósito estão pelo menos 6 caixas contendo o mesmo número de laranjas.

d) Nunca se provou que existe uma quantidade finita de pares de números naturais da forma $(p, p+2)$, onde p é primo.
Daí, existe uma quantidade infinita de tais pares.

Exemplo 2 Não são exemplos de argumentos:

a) Todos os professores que fazem pesquisa gostam de ensinar. Márcia é uma professora que gosta de ensinar. Existem professores que não fazem pesquisa.

b) Se a função seno for derivável e se toda função derivável for cont'ınua, então a função seno será contínua.

c) 1 é um número natural e é positivo.
2 é um número natural e é positivo.
3 é um número natural e é positivo.
...
Logo, todo número natural é positivo.

As premissas de um argumento são usadas como justificativas para a sua conclusão. Mas existem casos em que as premissas realmente justificam a conclusão e outros em que não.

Exemplo 3 Examinando o Exemplo 1, temos:
a) No argumento do item (a), as premissas justificam a conclusão.
b) No argumento do item (b), as premissas não justificam a conclusão.
c) No argumento do item (c), é difícil decidir se as premissas justificam a conclusão mas isto pode ser feito com um pouco de manipulação algébrica, se admitimos as propriedades usuais das operações de adição e multiplicação de números inteiros.
d) No argumento do item (d), até hoje não se sabe se as premissas justificam ou não a conclusão.

Utilizamos um argumento quando estamos interessados em provar a verdade de uma determinada sentença. Assim, argumentamos sobre determinadas bases (as premissas), de modo que o que queremos provar (a conclusão) tenha a sua verdade assentada sobre a verdade das premissas. Neste sentido, argumentar corretamente não é o mesmo que estar certo. Mesmo que as bases sobre as quais argumentamos não sejam verdadeiras, podemos efetuar boas argumentações.

Exemplo 4 Consideremos o seguinte argumento:

O conjunto dos números pares é um subconjunto do conjunto dos números naturais.
Todo conjunto possui mais elementos que cada um dos seus subconjuntos.
Assim, existem mais números naturais que números pares.

No argumento anterior, uma das premissas não é verdadeira (qual?). Porém, caso admitamos que ambas as premissas são verdadeiras, seremos obrigados a concluir que existem mais números naturais que números pares. Logo, este é um bom argumento (embora uma de suas premissas seja falsa).

O Exemplo 4 mostra que o fator determinante da boa argumentação não está na verdade das premissas sobre as quais ela se assenta, mas sim no fato de que, se aceitarmos as premissas do argumento em questão como verdadeiras, não poderemos considerar falsa a sua conclusão.

Exemplo 5 O argumento seguinte deve ser classificado como um bom argumento, a partir de qualquer critério razoável, embora até hoje não saibamos se sua premissa (e também conclusão) é uma sentença verdadeira.

Dizemos que um número natural é *perfeito* se é igual à soma de seus divisores próprios. Por exemplo, $6 = 1 + 2 + 3$ é perfeito, mas $10 \neq 1 + 2 + 5$ não é.

Existe um maior número perfeito.
Portanto, existe um maior número perfeito.

Segundo a definição de sentença, não podemos admitir que ao considerarmos a premissa do argumento acima como verdadeira, sua conclusão seja falsa.

Em decorrência temos a seguinte definição:

Definição (i) Um argumento será *válido* se em qualquer contexto for imposs'ıvel que sua conclusão seja falsa, caso se admita que suas premissas sejam verdadeiras.
(ii) Um argumento será *inválido* se não for válido, isto é, se for poss'ıvel que, em algum contexto, admitindo que suas premissas sejam verdadeiras se possa ter a conclusão falsa.

Veremos no próximo parágrafo como utilizar as tabelas de verdade para verificar a validade de argumentos.

6.3 O Método das Tabelas de Verdade

Cada uma das regras de avaliação pode ser interpretada como associando a cada conectivo uma *tabela de verdade* que descreve, de forma sucinta, a dependência entre o valor de verdade de uma sentença simbolizada composta e o valor de verdade de suas componentes.

Para os conectivos considerados as tabelas são as seguintes:

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Estas regras também nos permitem associar a cada sentença simbolizada α, uma tabela de verdade que descreve o "comportamento de verdade" de α, isto é, que valores de verdade α assume em cada uma das suas interpretações.

Seja α uma sentença simbolizada na qual ocorrem as letras $p_1, \ldots, p_m$. A tabela de verdade de α pode ser construída mediante a execução dos seguintes passos:

Passo 1) Numa *linha de referência* escreva as letras $p_1, \ldots, p_m$.

Passo 2) Debaixo da linha de referência escreva todas as 2^m interpretações para α.

Passo 3) Utilizando as tabelas de verdade dos conectivos, calcule gradativamente todos os valores de verdade de cada sentença simbolizada utilizada na formação de α, até obter o valor de α.

Passo 4) Ao final do processo, a matriz formada pelas m primeiras colunas em conjunto com a última coluna (aquela indexada por α) será a tabela de α.

Uma aplicação importante das tabelas de verdade é a verificação da validade de argumentos.

Um *argumento* é uma seqüência finita de sentenças, na qual uma é considerada como *conclusão* e as demais como *premissas*. As premissas de um argumento são consideradas justificativas para a conclusão.

Exemplo 1 São exemplos de argumentos:

a) João tem cabeça grande.
Pessoas de cabeça grande são intelectuais.
Logo, João é um intelectual.

Neste caso, as premissas justificam a conclusão.

b) João faz faculdade.
João estuda filosofia.
Logo, João é um intelectual.

Neste caso, as premissas não justificam a conclusão.

Um argumento é *válido* quando as premissas do argumento são, de fato, suficientes para justificar a conclusão.

Outras maneiras de dizer que um argumento é válido são:

1. A conclusão decorre necessariamente das premissas.
2. A verdade das premissas é suficiente para acarretar a verdade da conclusão.
3. A verdade da conclusão decorre necessariamente da verdade das premissas.
4. Supondo que as premissas sejam verdadeiras podemos garantir que a conclusão também é verdadeira.

O primeiro passo na utilização das tabelas de verdade para determinar se um dado argumento é válido ou não, consiste em simbolizar o argumento.

Exemplo 2

a) Considere o argumento:

Se o cão está latindo, o cão não está na casa.

Se o cão está na casa, então há alguém em frente à porta se o cão está latindo.

O cão está latindo, pois o cão está na casa.

Logo, não é o caso que há alguém em frente à porta ou o cão está latindo.

Reescrevendo, temos:

(o cão está latindo) $\rightarrow$ ($\neg$ (o cão está na casa))
(o cão está na casa) $\rightarrow$
((o cão está latindo) $\rightarrow$ (há alguém em frente à porta))
(o cão está na casa) $\rightarrow$ (o cão está latindo)
Logo, ($\neg$ (há alguém em frente à porta)) $\vee$ (o cão está latindo)

Simbolizando, temos:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow \neg q \\ q \rightarrow (p \rightarrow r) \\ q \rightarrow p \\ \hline \neg r \vee p \end{array}$$

onde p : (o cão está latindo), q : (o cão está na casa) e r : (há alguém em frente à porta).

Será este argumento válido?

b) Considere o seguinte argumento:

Se o cão está latindo, o cão está na casa.

Se o cão está na casa, então o cão não está latindo ou há alguém em frente à porta.

Na realidade, o cão está latindo.

Logo, não é o caso que há alguém em frente à porta.

Reescevendo, temos:

(o cão está latindo) $\rightarrow$ (o cão está na casa)
(o cão está na casa) $\rightarrow$
(($\neg$ (o cão está latindo)) $\vee$ (há alguém em frente à porta))
(o cão está latindo)
Logo, ($\neg$ (há alguém em frente à porta))

Simbolizando, temos:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow (\neg p \vee r) \\ p \\ \hline \neg r \end{array}$$

onde p : (o cão está latindo), q : (o cão está na casa) e r : (há alguém em frente à porta).

Será este argumento válido?

c) Considere o argumento:

7 é par se é divisível por 2.
7 é divisível por 2.
Logo, 7 é par.

Reescrevendo, temos:

(7 é divisível por 2) $\to$ (7 é par)
(7 é divisível por 2)
Logo, (7 é par)

Simbolizando, temos:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ q \end{array}$$

onde p : (7 é divisível por 2) e q : (7 é par).

Será este argumento válido?

Podemos agora mostrar como a validade dos argumentos acima pode ser determinada, utilizando as tabelas de verdade. Inicialmente, consideraremos o caso mais simples, ou seja, o argumento do item (c). Utilizando a definição de validade não podemos determinar diretamente a validade do argumento (c) pois, no contexto associado ao argumento, uma de suas premissas é falsa. Mas, como a própria definição dá a entender, para a determinação da validade, não estamos interessados em saber o que acontece apenas no contexto original e sim nos contextos em que as premissas são simultaneamente verdadeiras.

Definição Um argumento é *válido* se, em todos os contextos em que as premissas são simultaneamente V, a conclusão também é V.

Ou seja, um argumento é válido se não existe um contexto em que as premissas sejam simultaneamente V e a conclusão F.

No caso dos conectivos que possuem tabelas, contexto é o mesmo que interpretação. Assim, podemos reescrever a definição:

Definição Um argumento é *válido* se, em todas as interpretações para as premissas e conclusão simbolizadas em que as premissas são simultaneamente V, a conclusão também é V.

Ou seja, um argument é válido se não existe uma interpretação para as premissas e conclusão simbolizadas em que as premissas sejam simultaneamente V e a conclusão F.

Neste caso, verificar a validade se resume em verificar se:

i) Em todas as linhas da tabela de verdade em que as premissas são simultaneamente V, a conclusão é V (válido).

ii) Existe uma linha da tabela de verdade em que as premissas são simultaneamente V e a conclusão é F (inválido).

Exemplo 3

a) De acordo com a tabela:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

o argumento (c):

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ q \end{array}$$

é válido, pois, em todas as interpretações em que as premissas são simultaneamente V (no caso, somente a primeira), a conclusão é V.

b) Considere um exemplo simples:

7 ser par é necessário para que seja divisível por 2.
7 é par.
Logo, 7 é divisível por 2.

Reescrevendo, temos:

(7 é divisível por 2) $\to$ (7 é par)
(7 é par)
Logo, (7 é divisível por 2)

Simbolizando, temos:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \qquad\quad} \\ p \end{array}$$

onde p e q são como no item (c) do Exemplo 39.

De acordo com a tabela:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

o argumento é inválido, pois existe uma interpretação (a terceira) em que as premissas são simultaneamente V, a conclusão é F.

O conectivo que expressa a simultaneidade dos valores de verdade das sentenças componentes é o $\wedge$. De fato, temos que $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$ é V se, e somente se, cada um dos α_i, $1 \leq i \leq m$, é V. Assim, para verificar a validade do argumento:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \underline{\alpha_m \quad} \\ \beta \end{array}$$

devemos verificar se a tabela:

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$	β
V	V
V	F
F	V
F	F

não possui a ocorrência da segunda linha, ou seja, se nunca temos a sentença simbolizada $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$ assumindo o valor V e β assumindo o valor F, o que é equivalente a determinar se $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \to \beta$ é sempre V, pois o único caso em que a simbolização assume o valor F é aquele em que o antecedente assume valor V e o conseqüente assume valor F.

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$	β	$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \to \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplo 4

a) De acordo com a tabela:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

o argumento:

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline q \end{array}$$

é válido, pois $\models p \wedge (p \to q) \to q$.

b) De acordo com a tabela:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	$(p \to q) \wedge q \to p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

o argumento:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

é inválido, pois $(p \to q) \wedge q \to p$ não é uma tautologia.

Vamos agora verificar a validade dos argumentos (a) e (b) do Exemplo 2.

Exemplo 5

a) Desenvolvendo a tabela:

p	q	r	$(p \to \neg q) \wedge (q \to (p \to r)) \wedge (q \to p) \to (\neg r \vee p)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

vemos que o argumento:

$$\begin{array}{l} p \to \neg q \\ q \to (p \to r) \\ q \to p \\ \hline \neg r \vee p \end{array}$$

é válido, pois $\models (p \to \neg q) \wedge (q \to (p \to r)) \wedge (q \to p) \to (\neg r \vee p)$.

b) Desenvolvendo a tabela:

p	q	r	$(p \to q) \wedge (q \to (\neg p \vee r)) \wedge p \to \neg r$
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

vemos que o argumento:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to (\neg p \vee r) \\ p \\ \hline \neg r \end{array}$$

é inválido, pois $(p \to q) \wedge (q \to (\neg p \vee r)) \wedge p \to \neg r$ não é uma tautologia.

O método

Finalmente, introduzimos os seguintes conceitos, que formalizam o método descrito acima para determinar a validade de argumentos, utilizando as tabelas de verdade:

Definição Uma *interpretação* para as sentenças simbolizadas $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ é uma atribuição de valores de verdade às letras sentenciais que ocorrem em $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, de modo que, a cada letra sentencial, seja atribuído um único valor.

Definição Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ sentenças simbolizadas. Dizemos que β é uma *conseqüência tautológica* de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ se em todas as interpretações para $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ em que $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são simultaneamente V, temos que β também é V.

Escreveremos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \models \beta$ no lugar de *β é uma conseqüência tautológica de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$*.

A proposição a seguir mostra a relação existente entre os conceitos de tautologia e implicação tautológica.

Proposição 6.3.1 *Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ são sentenças simbolizadas, então as seguintes condições são equivalentes:*

a) $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \models \beta$

b) $\models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \to \beta$

Prova:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \models \beta$. Vamos mostrar que se a implicação

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \to \beta$$

não fosse uma tautologia, teríamos uma contradição.

De fato, se $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \to \beta$ não fosse uma tautologia, pela tabela do $\to$, teríamos que $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$ seria V e β seria F. Daí, pela tabela do $\wedge$, teríamos que cada α_i, $1 \leq i \leq m$, seria V. Mas, pela hipótese, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \models \beta$ e, assim, se todos os $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ fossem V, teríamos que β também seria V, uma contradição.

Logo, $\models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \to \beta$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \to \beta$. Suponhamos também que cada um dos α_i, $1 \leq i \leq m$, é V. Vamos mostrar que nestas condições β também é V.

De fato, pela tabela do $\wedge$, temos que a conjunção $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$ é V. Como temos que $\models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \to \beta$, pela tabela do $\to$, teremos que β é V.

Logo, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \models \beta$. ■

Assim, o Método das Tabelas de Verdade para verificar a validade de argumentos é o seguinte:

Passo 1) Reescrever o argumento.

Passo 2) Simbolizar as premissas $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ e a conclusão β do argumento.

Passo 3) Verificar, utilizando as tabelas de verdade, se a sentença simbolizada

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \to \beta$$

é uma tautologia. Se SIM, o argumento é válido. Caso contrário, é inválido.